

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.

Лекции для II потока математиков, весенний семестр 2022 г..

Лектор А.Я.Хелемский.

1. Банахова алгебра. Открытость множества ее обратимых элементов и непрерывность перехода к обратному элементу. Ограниченность и замкнутость спектра элемента банаховой алгебры. Местоположение спектра унитарного оператора.

2. Резольвентная функция и тождество Гильберта. Теорема о непустоте спектра. Формула спектрального радиуса (без док.). Функциональная банахова алгебра. Теорема Гельфанда (без док.).

3. Полинормированное пространство. Примеры. Топология полинормированного пространства. Сходимость последовательностей и условие хаусдорфовости в терминах преднорм.

4. Условие непрерывности оператора, действующего между полинормированными пространствами, в терминах преднорм. Сравнение топологий, заданных двумя системами преднорм. Непрерывность оператора дифференцирования в  $C^\infty[a, b]$ .

5. Достаточность семейства непрерывных функционалов на хаусдорфовом полинормированном пространстве. Слабая топология в полинормированном пространстве и слабая\* топология в пространстве, сопряженном к полинормированному. Сравнение слабой топологии в нормированном пространстве с исходной.

6. Условие выражения функционала в виде линейной комбинации других функционалов. Описание функционалов, непрерывных в слабой и непрерывных в слабой\* топологии.

7. Слабая\* непрерывность оператора, сопряженного к непрерывному оператору между преднормированными пространствами. Достаточное условие слабой\* плотности подпространства сопряженного пространства. Теорема Банаха-Алаоглу (без док.).

8. Пространство  $\mathcal{D}$ . Примеры функций из  $\mathcal{D}$  (горбушка и шляпа). Система преднорм в  $\mathcal{D}$ . Полинормированные пространства  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{E}$ . Сходящиеся последовательности в  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{E}$ .

9. Хаусдорфовость пространств  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{E}$ . Сравнение их топологий. Непрерывность оператора дифференцирования в  $\mathcal{D}$ .

10. Пространства обобщенных функций  $\mathcal{D}^*$ ,  $\mathcal{S}^*$  и  $\mathcal{E}^*$ . Условие непрерывности функционала на  $\mathcal{D}$  и на  $\mathcal{E}$ . Пространство  $L_1^{lok}(\mathbb{R})$  и его вложение в  $\mathcal{D}^*$ . Регулярные и сингулярные обобщенные функции.  $\delta$ -функция и ее сингулярность.

11. Топология в пространствах обобщенных функций. Плотность  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}^*$ . Существование и единственность обобщенной производной.

12. Вложение  $\mathcal{E}^*$  в  $\mathcal{D}^*$ . Носители обобщенной функции. Два подхода к понятию обобщенной функции с компактным носителем. Теорема об описании обобщенных функций с компактным носителем в терминах обобщенных производных (без док.).

13.  $C^*$ -тождество. Достаточное условие обратимости самосопряженного оператора. Местоположение спектра самосопряженного оператора.

14. Выражение для нормы многочлена от самосопряженного оператора. Непрерывное функциональное исчисление от самосопряженного оператора и его свойства.

15. Положительный оператор. Квадратичная форма оператора и полярное тождество. Арифметический квадратный корень из положительного оператора. Свойства оператора, эквивалентные его положительности.

16. Положительная и отрицательная части самосопряженного оператора. Семейство подпространств, ассоциированное с самосопряженным оператором. Разложение единицы самосопряженного оператора. Спектральная теорема Гильберта в аналитической и геометрической форме (без док.).

17. Классическое преобразование Фурье как оператор из  $L_1(\mathbb{R})$  в  $C_0(\mathbb{R})$ . Его инъективность и плотность образа (без док.). Связь между операциями дифференцирования и умножения на независимую переменную, осуществляемая с помощью преобразования Фурье.

18. Определение свертки. Свертка функций из  $L_1(\mathbb{R})$ . Связь свертки и поточечного умножения, осуществляемая с помощью преобразования Фурье.

19. Оператор Фурье в пространстве  $\mathcal{S}$ . Его непрерывность. Обратный оператор Фурье в  $\mathcal{S}$  и теорема обращения.

20. Существование и единственность преобразования Фурье в  $\mathcal{S}^*$ . Его непрерывная обратимость. Преобразование Фурье  $\delta$ -функции. Доказательство теоремы единственности классического преобразования Фурье.

21. Оператор Фурье в  $L_2(\mathbb{R})$  и теорема Планшереля.

22. Функции Эрмита как собственные функции оператора Фурье в  $L_2(\mathbb{R})$  и соответствующие собственные значения. Спектр этого оператора.