Программа курса «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» *(3 курс, отделение механики)*

1. Метрические и нормированные пространства. Теорема о пополнении. Лемма о вложенных шарах. Теорема Бэ́ра о множествах первой категории.

2. Эквивалентность различных определений непрерывности отображений метрических пространств. Принцип продолжения отображений по непрерывности.

3. Метрические линейные пространства. Ограниченные множества. Эквивалентность непрерывности и ограниченности для линейных отображений.

4. Принцип равностепенной непрерывности системы линейных отображений метрических линейных пространств. Принцип равномерной ограниченности.

5. Эквивалентность различных определений компактности множества в метрическом пространстве (в том числе критерий компактности Хаусдо́рфа).

6. Теоремы Арце́ла–Аско́ли и Ри́сса (критерии предкомпактности множеств соответственно в пространстве $\boldsymbol{C}(X)$ и в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$ при $0 < p < \infty$).

7. Теорема о продолжении мер с полукольца на минимальное кольцо. Свойства конечных мер (монотонность, полуаддитивность, непрерывность сверху и снизу).

8. Понятие внешней меры. Свойства измеримых множеств. Теорема Каратеодо́ри.

9. Внешняя мера Лебе́га. Существование и единственность продолжения σ-конечной меры, заданной на полуалгебре, на σ-алгебру измеримых множеств.

10. Лемма об измеримой оболочке. Критерии измеримости Валле́–Пуссе́на. Определение меры Лебе́га в $\mathbb{R}^n$ и меры Лебе́га–Сти́лтьеса в $\mathbb{R}$.

11. Измеримые функции. Критерий измеримости Лу́зина (без доказательства). Построение последовательности простых измеримых функций, сходящейся к измеримой функции.

12. Теоремы Его́рова и Ри́сса о взаимосвязи различных типов сходимости последовательности измеримых функций (почти всюду, по мере и почти равномерно).

13. Свойства интеграла Лебе́га (невырожденность, монотонность, верхняя грань по простым функциям). Теорема о счетной аддитивности интеграла Лебе́га.

14. Теорема Лебе́га о монотонной сходимости интеграла и ее следствие. Доказательство свойств линейности и модуля для интеграла Лебе́га.

15. Лемма Фату́. Теорема Лебе́га о мажорируемой сходимости. Неравенство Чебышёва. Вывод сходимости по мере последовательности функций, сходящейся в $\boldsymbol{L}_1(X,\mu)$.

16. Прямое произведение мер. Теорема о вычисление меры множества с помощью сечений.

17. Теорема Фуби́ни. Обобщенное неравенство Минко́вского.

18. Критерий Лебе́га интегрируемости функций по Ри́ману на n-мерном отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$.

19. Разложения Ха́на и Жорда́на. Критерий абсолютной непрерывности заряда. Формулы положительной, отрицательной и полной вариации абсолютно непрерывного заряда.

20. Разложение Жорда́на функции ограниченной вариации $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$. Равенство интегралов Ри́мана–Сти́лтьеса и Лебе́га–Сти́лтьеса на непрерывных функциях. Теорема Ри́сса о представлении непрерывных линейных функционалов на пространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$.

21. Разложение Жорда́на абсолютно непрерывных функций $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$. Доказательство формулы Ньютона–Ле́йбница для абсолютно непрерывных функций.

22. Определение пространств $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $0 < p \leqslant \infty$. Неравенства Гёльдера и Минко́вского. Теорема о полноте пространств $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $0 < p \leqslant \infty$.

23. Теорема Ри́сса–Штейнга́уза о представлении непрерывных линейных функционалов на пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

24. Теорема о полноте пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ непрерывных линейных отображений нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ в банахово пространство $\boldsymbol{F}$. Лемма о почти перпендикуляре. Необходимое и достаточное условие компактности шара в нормированном пространстве.

25. Изоморфизм конечномерных нормированных пространств. Эквивалентность норм в этих пространствах. Теоремы о существовании и единственности наилучшего приближения. Теорема Стóуна об аппроксимации (без доказательства).

26. Теорема Хана–Банаха о продолжении линейных функционалов (действительный и комплексный случай) и ее следствия для нормированных пространств.

27. Равносильность непрерывности линейного функционала и замкнутости гиперплоскости, определяемой этим функционалом. Теоремы Хáна, Мáзура и Хéлли.

28. Равномерная, сильная и слабая топологии в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ непрерывных линейных операторов. Теорема Банáха–Штейнгáуза. Критерий сильной сходимости в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

29. Слабая* топология в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}'$ и слабая топология в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$. Доказательство свойств и критерия слабой* и слабой сходимости.

30. Каноническое вложение $\boldsymbol{J}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ во второе сопряженное пространство $\boldsymbol{E}''$. Свойства образа $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{E})$ этого отображения.

31. Евклидовы пространства. Неравенства Кошú–Буняко́вского, треугольника и Бéппо-Лéви. Равенство параллелограмма. Теорема фон Нéймана (без доказательства).

32. Гильбертовы пространства. Теоремы о наилучшем приближении. Теорема об ортогональном разложении и ее следствие. Характеристика ортогональных проекторов.

33. Теорема Рúсса–Фрешé о представлении непрерывных линейных функционалов на гильбертовом пространстве. Теорема Радóна–Никодúма.

34. Ортонормированные системы элементов. Неравенство Бéсселя. Равенство Парсевáля. Теорема Стеклóва о замкнутости ортонормированной системы. Эквивалентность полноты и замкнутости в гильбертовом пространстве.

35. Вычисление величины наилучшего приближения конечномерным подпространством в евклидовом пространстве. Метод ортогонализации Грáма–Шмúдта. Теорема Рúсса–Фúшера об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

Дополнительная литература.

1. Богачев В. И. «Функциональный анализ».

2. Данфорд Н., Шварц Дж. «Линейные операторы, том 1».

3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. «Элементы теории функций и функционального анализа».

4. Иосида К. «Функциональный анализ».

5. Рид М., Саймон Б. «Методы математической физики, том 1».

6. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».

Осень 2021 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*