

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.

Лекции для II потока математиков, осенний семестр 2021 г..

Лектор А.Я.Хелемский.

1. Преднормированное и нормированное пространство. Примеры. Сопряженно-билинейный функционал и полярное тождество.

2. Скалярное произведение. Почти-гильбертово пространство. Примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертова норма и непрерывность по ней скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Теорема фон Нойманна-Йордана (без док.).

3. Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные системы. Их свойства и их примеры. Процесс ортогонализации. Определение функций и многочленов Эрмита.

4. Ряд Фурье в почти-гильбертовом пространстве. Предложение о ближайшем векторе в конечномерном подпространстве. Неравенство Бесселя. Тотальные ортонормированные системы. Теорема о разложении в ряд Фурье. Понятие о базисе Шаудера.

5. Ограниченный оператор между преднормированными пространствами. Пространство $\mathcal{B}(E, F)$ и операторная преднорма; достаточное условие, когда это норма. Сопряженное пространство. Мультипликативное неравенство для операторной преднормы.

6. Некоторые классы операторов: сжимающие, изометрические, коизометрические. Топологические, изометрические, унитарные изоморфизмы. Примеры операторов.

7. Характеризация ограниченных операторов как непрерывных. Возможность продолжения операторов в линейной алгебре (без док.). Пример Филлипса оператора, не продолжаемого с сохранением ограниченности (без док.).

8. Теорема Хана-Банаха; случай действительного поля скаляров и сепарабельного пространства.

9. Комплексная версия теоремы Хана-Банаха. Достаточность семейства ограниченных функционалов на нормированном пространстве. Теорема Рисса об описании ограниченных функционалов на $C[a, b]$ (без док.).

10. Банахово и гильбертово пространство. (Достаточное) условие, когда $\mathcal{B}(E, F)$ банахово. Суммируемые векторные ряды и “признак Вейерштрасса”. Принцип продолжения по непрерывности. Случай изометрического изоморфизма.

11. Теорема Рисса-Фишера. Теорема Энфло-Рида (без док.). Предложение о ближайшем векторе в замкнутом подпространстве.

12. Ортогональное дополнение к подмножеству и его свойства. Теорема об ортогональном дополнении. Условие тотальности системы в гильбертовом пространстве.

13. (Ортогональный) проектор. Теорема Рисса об описании ограниченных функционалов на гильбертовом пространстве. Банахов сопряженный оператор.

14. Гильбертов сопряженный оператор. Соотношения сопряженности. Свойства операции “гильбертова звездочка”. Связь между ядром оператора и образом его сопряженного.
15. Алгебраическая характеристика проектора. Теорема Банаха-Штейнхауса.
16. Принцип открытости (без док.) Теорема Банаха об обратном операторе (вывод из принципа открытости).
17. Пополнение нормированного пространства. Примеры. Теорема единственности. Рефлексивные пространства. Теорема существования пополнения.
18. Сверхограниченное (= вполне ограниченное) метрическое пространство. Эквивалентные условия сверхограниченности.
19. Эквивалентные условия компактности метрического пространства.
20. Сверхограниченность ограниченных множеств в \mathbb{R}_1^n . Свойства конечномерных нормированных пространств (топологическая изоморфность нормированных пространств одной размерности, полнота и др.).
21. Лемма о почти перпендикуляре. Теорема Рисса о сверхограниченных единичных шарах. Теорема Арцела (без док.).
22. Компактные операторы. Первые примеры и контрпримеры. Пространство $\mathcal{K}(E, F)$ и его замкнутость в $\mathcal{B}(E, F)$. Компактность интегрального оператора (без док.).
23. Свойство аппроксимации и его наличие у гильбертовых пространств. Понятие о примере Энфло (без док.).
24. Одномерные операторы вида $x \circ y$. Теорема Шмидта о строении компактных операторов между гильбертовыми пространствами.
25. Вид оператора, сопряженного к компактному в гильбертовом пространстве и теорема Гильберта-Шмидта о строении компактных самосопряженных операторов. Унитарно эквивалентные операторы. Унитарно эквивалентная модель компактного самосопряженного оператора.
26. Ядерные операторы в гильбертовом пространстве и теорема об их следе.
27. Коядро оператора. Фредгольмов оператор и его индекс. Первая теорема Фредгольма (о компактном возмущении тождественного оператора.).
28. Вторая теорема (= альтернатива) Фредгольма.
29. Третья теорема Фредгольма (об индексе компактного возмущения тождественного оператора). Тройная теорема Фредгольма в “традиционной” формулировке. Понятие о теореме Аргироза-Хойдена (без док.).
31. Спектр ограниченного оператора в банаховом пространстве. Точечный, непрерывный и остаточный спектр. Строение спектра компактного оператора в гильбертовом пространстве.
32. Алгебра и спектр ее элемента. Поведение спектров при гомоморфизме. Полиномиальное исчисление от элемента алгебры. Закон отображения спектров для полиномиального исчисления. Спектр обратного элемента.