# **Программа курса «Функциональный анализ»**,

3-й курс, 1-ый поток, 2021

Лектор: проф. А. А. Шкаликов

1. Метрические пространства. Полнота. Сепарабельность. Примеры полных и неполных, сепарабельных и несепарабельных пространств. Теорема о пополнении (без док-ва).
2. Лемма о вложенных замкнутых множествах. Теорема Бэра.
3. Компакты в метрических и топологических пространствах. Их свойства (сформулировать 6 предложений, доказательство некоторых из них по требованию экзаменатора).
4. Критерий компактности в метрическом пространстве (полная ограниченность и полнота).
5. Эквивалентность компактности, счетной компактности и секвенциальной компактности в метрическом пространстве.
6. Критерии полной ограниченности в $\ell_p,\ p \geqslant 1$, и в $C[0,1]$ (привести формулировки, доказательство для одного из пространств).
7. Критерий полной ограниченности в $L_p[0,1],\ p \geqslant 1$ (теорема М.Рисса).
8. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза).
9. Теорема об открытости образа сюръективного линейного отображения. Теорема Банаха об обратном операторе.
10. Теорема Банаха об обратном операторе (как следствие теоремы об открытости образа). Теорема о замкнутом графике.
11. Теорема Хана-Банаха для вещественных линейных пространств.
12. Теорема Хана-Банаха для комплексных линейных пространств.
13. Сопряженное к линейному нормированному пространству, его полнота (как следствие теоремы о полноте пространства $\mathcal{L}(X, Y)$). Равенство $\dim L = \dim L^*$.
14. Изометрическое вложение линейного нормированного пространства во второе сопряженное. Рефлексивные пространства. Примеры рефлексивных и нерефлексивных пространств.
15. Теорема о сепарабельности линейного нормированного пространства при условии сепарабельности сопряженного.
16. Доказать нерефлексивность пространства $l_1$.
17. Базисы в банаховом пространстве. Сопряженное к пространству $l_p,\ p \geqslant 1$.
18. Теорема Рисса о пространстве, сопряженном к $C[a,\, b]$.
19. Полные и замкнутые системы в банаховых пространствах. Эквивалентность этих понятий. Примеры полных систем в банаховых и гильбертовых пространствах.
20. Предгильбертовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Функционал $\sqrt{(x,\, x)}$ обладает свойством нормы. Лемма Рисса о проекции (существовании и единственности элемента, на котором достигается расстояние до подпространства).
21. Теорема об ортогональном разложении в гильбертовом пространстве.

22. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве, процесс ортогонализации. Теорема Пифагора, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

23. Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Изоморфизм (антилинейный) гильбертовых пространств $H$ и $H^*$.

24. Эквивалентность свойств полноты, замкнутости и выполнения равенства Парсеваля для ортонормированных систем. Доказать: полная ортонормированная система есть базис.

25. Лемма об $1-\varepsilon$ перпендикуляре. Усиленная версия леммы для конечномерного подпространства. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном банаховом пространстве.

26. Сильная м слабая сходимости. Эквивалентность сильной и слабой ограниченности множеств (последовательностей) в банаховых пространствах.

27. Слабая и $*$-слабая топологии в банаховом пространстве. Теорема Банаха-Алаоглу (без док-ва). Ее версия для рефлексивных пространств.

28. Секвенциальная $*$- слабая компактность замкнутого единичного шара в сепарабельном банаховом пространстве.

29. Секвенциальная слабая компактность единичного шара в гильбертовом пространстве.

30. Определение сопряженного оператора, действующего в банаховых пространствах $A : X \to Y$ и равенство $\|A\| = \|A^*\|$. Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Равенство $A = A^{**}$. Равенство $\|A\| = \|A^*\|$.

31. Компактные операторы. Примеры и свойства компактных операторов. Теорема о равномерном пределе компактных операторов.

32. Доказать, что компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

33. Приближение компактного оператора конечномерными в гильбертовом пространстве. Общий вил конечномерного оператора. Сопряженный к компактному компактен (док-во для гильбертова пространства).

34. Спектр и резольвента, их замкнутость и открытость. Грубая оценка спектрального радиуса $r(A) \leqslant \|A\|$.

35. Аналитические свойства резольвенты. Непустота спектра ограниченного оператора.

36. Теорема о спектральном радиусе.

37. Интегральные операторы. Интегральный оператор с треугольным ядром вольтерров.

38. Критерий самосопряженности оператора в терминах его квадратичной формы. Вещественность спектра самосопряженного оператора.