ПРОГРАММА КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

(*3 курс, вечернее отделение*)

1. Примеры основных функций. Построение аппроксимативной единицы и шапочки в единичном шаре пространства $\mathbb{R}^m$. Структура обобщенных функций с носителем в одной точке.

2. Усреднение функций в смысле Со́болева. Теорема о плотности основных функций в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X)$, где $1 \leqslant p < \infty$ и $X \subset \mathbb{R}^m$ открытое множество, и ее следствие для пространства $\boldsymbol{L}_\infty(X)$.

3. Регулярные обобщенные функции. Лемма о регуляризации обобщенных функций. Инъективность и непрерывность вложения пространства $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ локально интегрируемых функций на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$ в пространство $\mathscr{D}'(X)$ обобщенных функций.

4. Пространства Со́болева $\mathscr{W}_p^k(X)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $k \in \mathbb{Z}_+$. Теорема о существовании первообразной обобщенной функции. Необходимые и достаточные условия существования производной в смысле Со́болева на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

5. Всюду плотность множества основных функций $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ в пространстве Шва́рца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Инъективность и непрерывность вложений $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ и $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

6. Лемма Шва́рца. Действия в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ обобщенных функций медленного роста (умножение, сдвиг, растяжение, замены переменных и дифференцирование). Формула Ле́йбница.

7. Непрерывность и биективность преобразования Фурье́ в пространствах $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Преобразование Фурье́ обобщенной функции из пространства $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$. Свойства преобразования Фурье́ (формулы сдвига, растяжения, замены переменных и дифференцирования).

8. Тензорное произведение обобщенных функций и его свойства (коммутативность, ассоциативность, дифференцирование, умножение на функцию по каждому аргументу, сдвиг, носитель).

9. Теорема о существовании свертки обобщенных функций в пространствах $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Свойства свертки (коммутативность, ассоциативность, дифференцирование, сдвиг, непрерывность, носитель).

10. Преобразование Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и его свойства. Лемма Ри́мана–Лебе́га. Условие Ди́ни.

11. Преобразование Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и его свойства. Теорема Планшере́ля.

12. Полнота и преобразование Фурье́ функций Эрми́та в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

13. Сверточная алгебра $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$. Вычисление обратного элемента к $D\delta(x)$, где $D \doteqdot \partial^n + \sum_{i=1}^n a_i \partial^i$ есть дифференциальный оператор с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_i \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$.

14. Лемма о почти открытом отображении банахова пространства. Теоремы Ба́наха о гомоморфизме и об обратном операторе. Необходимые и достаточные условия биективности линейного оператора.

15. Доказательство полноты факторпространства банахова пространства по замкнутому подпространству. Гомоморфизм факторотображения. Теорема о трех гомоморфизмах.

16. Доказательство полноты произведения банаховых пространств. Теорема Ба́наха о замкнутом графике. Определение замыкания линейного оператора. Пример замкнутого неограниченного оператора.

17. Лемма о бианнуляторах линейного подпространства. Доказательство равенства замыкания и слабого замыкания линейного подпространства в нормированном пространстве.

18. Сопряженный оператор к ограниченному оператору. Соотношения между ядром и образом оператора и его сопряженного. Формулы $\mathrm{Im} A = (\ker A')_\perp$ и $\mathrm{Im} A' = (\ker A)^\perp$ для операторов с замкнутым образом.

19. Эрмитово-сопряженный оператор и его свойства (область определения, линейность, замкнутость и ограниченность). Эрмитовы операторы. Теорема Хе́ллингера–Те́плица.

20. Определение проектора и его свойства. Критерий дополняемости подпространства в банаховом пространстве. Дополняемость подпространств конечной размерности и конечной коразмерности.

21. Теорема Да́нфорда о голоморфных функциях со значениями в банаховом пространстве. Интегральная формула Коши́. Разложения в степенной ряд Те́йлора. Теорема Лиуви́лля. Формула Коши́–Адама́ра.

22. Теоремы о резольвенте и о спектре ограниченного оператора в банаховом пространстве. Спектр и резольвента сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов.

23. Структура спектра ограниченного оператора. Лемма об операторе обратимом слева. Теорема о границе спектра. Структура спектра диагонального оператора в $\boldsymbol{\ell}_p$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

24. Теорема о спектральном радиусе ограниченного оператора. Равенство спектров для эквивалентных операторов. Структура спектра оператора свертки в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ с интегрируемым ядром из $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$.

25. Компактные операторы в нормированных пространствах и их основные свойства. Компактность ядерных операторов. Компактность интегральных операторов Ги́льберта–Шми́дта пространстве $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$.

26. Свойства спектра компактного оператора в банаховом пространстве. Теорема Ри́сса–Ша́удера. Теорема Ша́удера о компактности сопряженного оператора (прямая и обратная).

27. Фредго́льмовы операторы в банаховых пространствах. Лемма о замкнутости их образа. Теорема о каноническом операторе Фредго́льма $A = I - K$, где K — компактный оператор.

28. Три теоремы Фредго́льма о разрешимости линейных уравнений в банаховом пространстве. Теорема об индексе канонического оператора Фредго́льма.

29. Свойство аппроксимации в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$. Доказательство этого свойства в случае, когда в пространстве $\boldsymbol{E}$ существует базис Ша́удера.

30. Теорема Нико́льского об обратимости ограниченных операторов по мобулю компактных операторов. Теорема об устойчивости индекса фредго́льмова оператора при компактных возмущениях. Существенный спектр ограниченного оператора.

31. Свойства спектра эрмитова оператора. Теорема Ве́йля. Теорема Ги́льберта–Шми́дта. Интегральное представление резольвенты интегрального оператора Ги́льберта–Шми́дта в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$.

32. Доказательство существования функции Гри́на задачи Шту́рма–Лиуви́ лля. Теоремы о существования решения и полноте собственных функций задачи Шту́рма–Лиуви́лля в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$.

33. Преобразование Кэ́ли замкнутого симметрического оператора в гильбертовом пространстве (теоремы прямая и обратная). Теорема Фон Не́ймана о структуре эрмитово-сопряженного оператора в гильбертовом пространстве и ее следствие.

Дополнительная литература.

1. Богачев В. И., Смолянов О. Г. «Действительный и функциональный анализ».
2. Иосида К. «Функциональный анализ».
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. «Функциональный анализ».
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В «Элементы теории функций и функционального анализа».
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа».
6. Смирнов В. И. «Курс высшей математики». Том IV.
7. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».
7. Хелемский А. Я. «Лекции по функциональному анализу».

Весна 2021 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*