

**Программа курса «Функциональный анализ»  
Мех-мат, 3 курс, механики, весна 2020/21 уч.г.**

1. Линейные ограниченные операторы на нормированном пространстве. Свойства, эквивалентные ограниченности. Пространство линейных ограниченных операторов, достаточное условие его полноты. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха — Штейнгауза). Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства).
2. Продолжение оператора по непрерывности. Теорема Хана — Банаха (вещественный случай, продолжение с подпространства коразмерности 1).
3. Теорема Хана — Банаха (завершение доказательства вещественного случая, комплексный случай). Продолжение линейного непрерывного функционала с сохранением нормы.
4. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор, его норма. Второе сопряженное пространство, каноническое вложение  $E$  в  $E^{**}$ . Рефлексивные пространства.
5. Общий вид линейных непрерывных функционалов на пространстве  $L_p(X, \mu)$  (доказательство только для  $l_p$ ).
6. Общий вид линейных непрерывных функционалов на пространстве  $C([a, b])$ .
7. Слабая и \*-слабая сходимость на нормированных пространствах. Ограниченность слабо ограниченного множества. \*-слабая (секвенциальная) компактность шара.
8. Евклидовы и гильбертовы пространства. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму подпространства и ортогонального дополнения.
9. Ортогональные и ортонормированные системы. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Полнота ортонормированной системы и эквивалентные ей свойства.
10. Существование ортонормированного базиса в гильбертовом и в сепарабельном евклидовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
11. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве. Эрмитово сопряженные операторы, самосопряженные операторы. Ортогональные проекторы.
12. Спектр оператора, его классификация. Компактность спектра.
13. Непустота спектра. Теорема о спектральном радиусе. Нормальные операторы и пустота их остаточного спектра.
14. Критерий Вейля. Свойства спектра самосопряженного оператора.
15. Компактные операторы. Операции над операторами, сохраняющие компактность.
16. Ортонормированный базис в  $L_2(X^2, \mu \times \mu)$ . Компактность в  $L_2(X, \mu)$  интегрального оператора с ядром из  $L_2(X^2, \mu \times \mu)$ .
17. Спектр компактного оператора.
18. Теорема Гильберта — Шмидта.
19. Достаточное условие компактности в  $C(K)$  (обобщение теоремы Арцела). Компактность оператора, сопряженного к компактному.
20. Три теоремы Фредгольма (доказательства - для случая гильбертова пространства).
21. Полиноммированные пространства. Линейные ограниченные операторы на них. Критерий хаусдорфовости топологии полиноммированного пространства.
22. Примеры полиноммированных пространств. Пространства, сопряженные к полиноммированным. Сходимость в полиноммированном пространстве.
23. Критерий нормируемости и критерий метризуемости топологии полиноммированного пространства.
24. Пространства основных функций. Примеры элементов  $\mathcal{D}$ .

25. Стандартная сходимость в  $\mathcal{D}$ , её неметризуемость и её связь с системой допустимых полунорм.

26. Эквивалентные определения непрерывности линейного отображения на  $\mathcal{D}$ . Непрерывность операторов дифференцирования в пространствах основных функций.

27. Пространства обобщённых функций. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Достаточность запаса основных функций (инъективность отображения  $L_{1,loc} \rightarrow \mathcal{D}'$ ).

28. Дифференцирование в пространствах обобщённых функций, умножение обобщённых функций на гладкие. Существование первообразной для элемента  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

29. Носитель обобщённой функции. Разбиение единицы. Оценка обобщённой функции с компактным носителем.

30. Строение обобщённой функции с компактным носителем. Строение обобщённой функции с носителем в точке.

31. Преобразование Фурье на пространстве  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Лемма о плотности  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  в  $L_p(\mathbb{R})$ .

32. Теорема Планшереля о преобразовании Фурье на  $L_2(\mathbb{R})$ . Преобразование Фурье на пространстве  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Согласованность определений преобразования Фурье для регулярных обобщённых функций.

33. Система функций Эрмита и её свойства. Спектр оператора преобразования Фурье на  $L_2(\mathbb{R})$ .

34. Свёртка интегрируемых функций. Преобразование Фурье свёртки.

Лектор, д.ф.-м.н., профессор

А. Н. Бахвалов

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН

Б. С. Капин