

## Билеты к курсу «Функциональный анализ» 6 семестр

1. Понятие о локально выпуклом пространстве. Примеры. Пространства  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{S}$  и сходимости в них. Плотность  $\mathcal{D}$  в пространстве  $L^2(\mathbf{R}^1)$ .
2. Обобщенные функции классов  $\mathcal{D}'$  и  $\mathcal{S}'$ . Производная обобщенной функции. Равенство  $(\ln|x|)' = \text{V.P.} \frac{1}{x}$ .
3. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его основные свойства (непрерывность, ограниченность, производная преобразования Фурье, преобразование Фурье производной).
4. Формула обращения для преобразования Фурье в случае интегрируемого преобразования Фурье. Формула обращения в точках дифференцируемости (без доказательства). Преобразование Фурье в  $\mathcal{S}$  и его непрерывность.
5. Равенство Парсеваля для интегралов Фурье. Инъективность преобразования Фурье. Полнота системы функций Эрмита.
6. Преобразование Фурье в  $L^2$  и теорема Планшереля.
7. Преобразование Фурье в  $\mathcal{S}'$ . Преобразование Фурье дельта-функции. Согласованность преобразований Фурье в  $L^1$ ,  $L^2$  и  $\mathcal{S}'$ .
8. Свертка интегрируемых функций. Свертка обычной и обобщенной функций. Использование преобразования Фурье и свертки для решения дифференциальных уравнений.
9. Пространства С.Л. Соболева  $W^{p,k}$  и их характеристика через пополнение по соболевской норме.
10. Описание  $W^{2,k}$  через преобразование Фурье. Теоремы вложения в  $L^q$  и  $C$  (без доказательства).
11. Спектр оператора. Сохранение обратимости при малых возмущениях. Замкнутость спектра, включение его в круг радиуса, равного норме оператора, и непустота.
12. Спектр диагонального оператора. Норма и спектр оператора умножения на функцию.
13. Строение спектра компактного оператора в бесконечномерном пространстве.
14. Альтернатива Фредгольма ( $\text{Ker}(I - K) = 0 \iff (I - K)X = X$ ).
15. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма. Критерий Вейля и вещественность спектра самосопряженного оператора.
16. Равенства

$$\|A\| = \sup\{|(Ax, x)|, \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda|: \lambda - \text{точка спектра } A\}$$

для самосопряженного оператора  $A$ .

17. Теорема Гильберта – Шмидта о компактных самосопряженных операторах.
18. Унитарные операторы и унитарная эквивалентность операторов. Спектр оператора преобразования Фурье и спектр оператора свертки.
19. Теорема об отображении спектров для многочленов. Непрерывные функции от самосопряженных операторов и равенство  $\|f(A)\| = \sup_{t \in \sigma(A)} |f(t)|$ .
20. Циклические векторы. Эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию (доказательство для случая оператора с циклическим вектором).
21. Проекторы и проекторнозначные меры. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере. Явное вычисление спектральной меры для оператора умножения на аргумент и для проектора.

Лектор  
профессор

В. И. Богачев

Заведующий кафедрой теории  
функций и функционального анализа,  
академик РАН, профессор

Б. С. Кашин