Программа курса «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»
(*3 курс, вечернее отделение*)

1. Теорема о пополнении метрического пространства. Принцип сжимающих отображений. Лемма о вложенных шарах. Теорема Бэ́ра о множествах первой категории.

2. Принцип продолжения по непрерывности. Эквивалентность непрерывности и ограниченности для линейных отображений метрических линейных пространств.

3. Принцип равностепенной непрерывности системы линейных отображений метрических линейных пространств. Принцип равномерной ограниченности.

4. Эквивалентность различных определений компактности в метрических пространствах, в том числе критерий компактности Хаусдо́рфа.

5. Критерии предкомпактности множеств в пространствах $\boldsymbol{C}(X)$ и в $\boldsymbol{\ell}_p$, $1 \leqslant p < \infty$, (теоремы Арце́ла–Аско́ли и Ри́сса).

6. Изоморфизм нормированных пространств конечной размерности. Теоремы о существовании и единственности наилучшего приближения. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.

7. Теорема Ха́на–Ба́наха (действительный и комплексный случай) и ее следствия.

8. Теорема Мазура об опорной к шару гиперплоскости. Существование биортогональных систем. Теорема Хелли о системе линейных уравнений.

9. Теорема о полноте пространства ограниченных операторов. Равномерная, сильная и слабая топологии в пространстве ограниченных операторов. Теорема Ба́наха–Штейнга́уза о равномерной ограниченности.

10. Свойства и критерий сильной сходимости последовательности ограниченных операторов. Свойства и критерий слабой* сходимости в $\boldsymbol{E}'$ и слабой сходимости в $\boldsymbol{E}$.

11. Каноническое вложение нормированного пространства в второе сопряженное пространство и его свойства (изометричность, слабая* плотность и слабая* непрерывность элементов образа).

12. Критерий слабой* компактности множества в сопряженном пространстве к сепарабельному нормированному пространству.

13. Функции ограниченной вариации $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ и их свойства. Равенство интегралов Ри́мана–Сти́лтьеса и Лебе́га–Сти́лтьеса для непрерывных функций. Теорема Ри́сса о представлении непрерывных линейных функционалов в $\boldsymbol{C}[a,b]$.

14. Теорема Радо́на–Никоди́ма (без доказательства). Критерий абсолютной непрерывности заряда. Свойства абсолютно непрерывных функций $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$. Формула Нью́тона–Ле́йбница.

15. Неравенства Гёльдера и Минко́вского. Теорема о полноте пространств $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Теорема Штейнга́уза о представлении непрерывных линейных функционалов в $\boldsymbol{L}_1(X,\mu)$.

16. Евклидовы пространства. Неравенства Коши́–Буняко́вского, треугольника и Бе́ппо Ле́ви. Равенство параллелограмма. Теорема Дж. фон Не́ймана (без доказательства).

17. Существование и единственность наилучшего приближения в гильбертовы пространстве. Формула для величины наилучшего приближения конечномерным подпространством.

18. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства и ее следствие. Теорема Ри́сса–Фреше́ о представлении функционалов в гильбертовом пространстве.

19. Ортонормированные системы в евклидовом пространстве. Неравенство Бе́сселя. Равенство и обобщенное равенство Парсева́ля. Теорема Стекло́ва о замкнутости и ее следствие.

20. Метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта. Теорема Ри́сса–Фи́шера об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств. Полнота тригонометрической системы в $\boldsymbol{L}_2[0,2\pi]$.

21. Локально выпуклые пространства (топология, отделимость и непрерывные отображения). Теорема о метризуемости локально выпуклых пространств.

22. Индуктивный предел локально выпуклых пространств (совпадение суженной топологии с топологией подпространств, отделимость, критерий непрерывности отображения).

23. Пространство $\mathscr{D}(X)$ основных функций на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$. Его ограниченные множества и полнота. Теорема о слабой* полноте сопряженного пространства $\mathscr{D}'(X)$.

24. Действия с обобщенными функциями в пространстве $\mathscr{D}'(X)$ (умножение на функцию из $\boldsymbol{C}^\infty(X)$, дифференцирование, сдвиг, растяжение и замена переменных).

25. Носитель обобщенной функции. Лемма о локализации. Теорема об обобщенных функциях с компактным носителем. Инъективность и непрерывность вложения $\mathscr{E}'(X) \hookrightarrow \mathscr{D}'(X)$.

26. Теорема Шва́рца о лоальной структуре обобщенных функций.

Дополнительная литература.

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. «Элементы теории функций и функционального анализа».

2. Рид М., Саймон Б. «Методы современной математической физики. Том 1».

3. Владимиров В. С. «Обобщенные функции в математической физике».

4. Данфорд Н., Шварц Дж. «Линейные операторы. Том 1».

5. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».

Осень 2020 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой

теории функций и функционального анализа,

академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*