Программа курса «Функциональный анализ»
Мех-мат, 3 курс, отделение механики, осень 2020/21 уч.г.

1. Метрические и нормированные пространства, примеры. Полнота. Лемма о пополнении подпространства в полном метрическом пространстве.
2. Принцип вложенных шаров. Теорема Бэра. Принцип сжимающих отображений.
3. Теорема о пополнении метрического пространства.
4. Теорема Линделефа о выделении счетного подпокрытия. (Пред)компактность и вполне ограниченность в метрических пространствах, элементарные свойства.
5. Равносильные определения предкомпактности в метрических пространствах. Критерий (пред)компактности Хаусдорфа.
6. Теорема Арцела — Асколи о (пред)компактности в пространстве непрерывных функций на отрезке.
7. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность шаров в бесконечномерном нормированном пространстве.
8. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ-алгебры). Примеры. Теорема о минимальном кольце, порожденном полукольцом.
9. Меры на полукольцах и на кольцах. Пространство с мерой. Примеры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер. Полнота мер.
10. Связь σ-аддитивности и непрерывности меры. Стандартная мера на полукольце промежутков в $\mathbb{R}^n$ и ее σ-аддитивность.
11. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств.
12. Мера Лебега и корректность ее определения. Измеримость счетного объединения измеримых множеств. Счётная аддитивность меры Лебега.
13. σ-конечные меры и их продолжение по Лебегу (без обоснования). Пространство с мерой. Теорема о структуре измеримых множеств.
14. Измеримое пространство. Измеримые функции. Элементарные свойства измеримых функций.
15. Измеримость предела последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду. Критерий сходимости почти всюду на множестве конечной меры.
16. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема Егорова. Теорема Лузина (без док-ва).
17. Пространство с мерой. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
18. Определение интеграла Лебега в общем случае. Базовые свойства интеграла Лебега.
19. Свойства интеграла Лебега как функции множества. Неравенство Чебышёва. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
20. Теорема Лебега о предельном переходе.
21. Теорема Б. Леви о предельном переходе.
22. Теорема Фату. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке, связь интеграла Лебега с несобственным интегралом Римана.
23. Счетная аддитивность произведения счетно-аддитивных мер. Прямое произведение мер.
24. Теорема о выражении меры множества через меры сечений. Интеграл как мера подграфика.
25. Теорема Фубини. Достаточное условие существования двойного интеграла (теорема Тонелли).
26. Заряды. Разложения Хана и Жордана. Теорема Радона — Никодима (без док-ва).

27. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства $L_p(X)$, $1 \le p \le \infty$.

28. Полнота пространств $L_p(X)$, $1 \le p < \infty$.

29. Базис меры. Достаточное условие сепарабельности пространств $L_p(X)$, $1 \le p < \infty$.

30. Функции ограниченной вариации и их свойства. Непрерывность вариации с переменным верхним пределом для непрерывной функции.

31. Интеграл Римана — Стилтьеса. Его связь с интегралом Лебега по мере Стилтьеса, достаточные условия существования интеграла Римана — Стилтьеса.

32. Существование (без док-ва) и интегрируемость производной от монотонной функции. Абсолютно непрерывные функции. Производная неопределённого интеграла Лебега и формула Ньютона — Лейбница (обе теоремы - без док-ва). Интегрирование по частям в интеграле Лебега.

33. Замена переменной в интеграле Лебега.

34. Преобразование Фурье в пространстве $L_1(\mathbb{R})$. Условие Дини.

35. Теорема единственности для преобразования Фурье.

36. Дифференцирование интеграла Лебега по параметру. Производная преобразования Фурье и преобразование Фурье производной.

Лектор, д.ф.-м.н., профессор А. Н. Бахвалов

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН Б. С. Кашин