Программа курса «Функциональный анализ»
Мех-мат, 3 курс, 2 поток, осень 2020/21 уч.г.

1. Нормированные и банаховы пространства, операторы и функционалы на них. Полнота пространств $C[0,1]$, l_p и пространства ограниченных операторов.

2. Теорема Хана-Банаха, вещественный и комплексный случай. Следствия из теоремы Хана-Банаха (продолжение с сохранением нормы; функционалы различают векторы; непрерывный ненулевой функционал с ядром, содержащим заданное замкнутое подпространство). Слабая сходимость в нормировнных пространствах. Сходимости функционалов и операторов. $*$-Слабая сходимость в сопряженном пространстве.$*$-Слабая компактность шара в сопряженном пространстве. Общий вид непрерывного функционала на пространстве L_1.

3. Теорема Бэра о вложенных шарах и теорема о категории полного метрического пространства. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Хеллингера-Тёплица. Ограниченность слабо сходящейся последовательности.

4. Теорема Банаха об обратном операторе. Устойчивость обратимости ограниченного оператора.

5. Спектр ограниченного оператора, его свойства, непустота. Спектр оператора умножения на ограниченную измеримую функцию.

6. Формула спектрального радиуса для ограниченного оператора. Примеры вычисления спектрального радиуса.

7. Гильбертовы пространства. Тождество параллелограмма. Лемма об ортогональной проекции и её следствия. Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.

8. Свойства сопряжённых операторов.Связь образа оператора с ядром сопряженного операторов. Вещественность спектра самосопряженного оператора. Спектральный радиус самосопряженного оператора.

9. Предкомпактные множества. Теорема Арцела. Лемма о почти перпендикуляре. Компактные операторы и их свойства. Компактность интегрального оператора в $L_1(0,1)$ с непрерывным ядром $K(x,y)$ и интегрального оператора в $L_2(0,1)$ с квадратично интегрируемым ядром $K(x,y)$.

10. Компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в сходящуюся. Эквивалентность компактности операторов A, A^*, A^*A в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта–Шмидта.

11. Альтернатива для фредгольмовых операторов в гильбертовом пространстве.

12. Точечность спектра компактного оператора как следствие альтернативы Фредгольма. Свойства спектра компактного оператора.

Лектор, д.ф.-м.н., профессор В. В. Рыжиков

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН Б. С. Кашин