ПРОГРАММА КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

(*3 курс, отделение механики*)

1. Изоморфизм конечномерных нормированных пространств. Теоремы о существовании и единственности наилучшего приближения в нормированном пространстве.

2. Лемма Ри́сса о почти перпендикуляре. Необходимое и достаточное условие компактности единичного шара в нормированном пространстве. Критерий предкомпактности множества в ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$.

3. Теорема о полноте пространства ограниченных операторов $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и сопряженного пространства $\boldsymbol{E}'$. Норма оператора умножения на функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Теорема Ба́наха–Штейнга́уза.

4. Упорядоченные множества. Лемма Цо́рна. Теорема Ха́на–Ба́наха о продолжении функционалов (над полем действительных и комплексных чисел) и ее следствие для нормированных пространств.

5. Теорема Ри́сса о представлении ограниченных функционалов на пространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$. Сопряженное пространство $\boldsymbol{C}'[a,b]$. Сопряженное пространство $\boldsymbol{L}'_p(X,\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$ (без доказательства).

6. Локально выпуклые топологии равномерной, сильной и слабой сходимости в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. Свойства и критерий сильной сходимости последовательности операторов в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

7. Биортогональные системы. Каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \hookrightarrow \boldsymbol{E}''$ во второе сопряженное пространство $\boldsymbol{E}''$ (изометричность, слабая* плотность и слабая* непрерывность элементов образа).

8. Локально выпуклые топологии слабой сходимости в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ и слабой* сходимости в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}'$. Критерии слабой сходимости в $\boldsymbol{E}$ и слабой* сходимости в $\boldsymbol{E}'$.

9. Евклидовы пространства. Неравенство Коши́–Буняко́вского, неравенство треугольника, неравенство Бе́ппо Ле́ви, равенство параллелограмма. Теорема Дж. фон Не́ймана (без доказательства).

10. Ги́льбертовы пространства. Существование и единственность наилучшего приближения замкнутым подпространством. Формула для величины наилучшего приближения конечномерным подпространством.

11. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства и ее следствие. Контрпример к этому следствию. Теорема Ри́сса–Фреше́ о представлении функционалов в гильбертовом пространстве.

12. Ортонормированные системы. Неравенство Бе́сселя. Равенство Парсева́ля и обобщенное равенство Парсева́ля. Теорема Стекло́ва о замкнутости и ее следствие. Контрпример к этому следствию.

13. Метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта. Теорема Ри́сса–Фи́шера об изометрическом изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств. Полнота тригонометрической системы в $\boldsymbol{L}_2[0,2\pi]$.

14. Лемма о почти открытом отображении банахова пространства. Теоремы Ба́наха о гомоморфизме и об обратном операторе. Необходимые и достаточные условия биективности линейного оператора.

15. Доказательство полноты факторпространства банахова пространства по замкнутому подпространству. Гомоморфизм факторотображения. Теорема о трех гомоморфизмах.

16. Доказательство полноты произведения банаховых пространств. Определение замкнутого линейного оператора. Теорема Ба́наха о замкнутом графике. Пример замкнутого неограниченного оператора.

17. Лемма о бианнуляторах линейного подпространства. Доказательство равенства замыкания и слабого замыкания линейного подпространства в нормированном пространстве.

18. Сопряженный оператор к ограниченному оператору. Соотношения между ядром и образом оператора и его сопряженного. Формулы $\mathrm{Im} A = (\ker A')_\perp$ и $\mathrm{Im} A' = (\ker A)^\perp$ для операторов с замкнутым образом.

19. Эрмитово-сопряженный оператор и его свойства (область определения, линейность, замкнутость и ограниченность). Эрмитовы операторы. Теорема Хе́ллингера–Те́плица.

20. Определение проектора и его свойства. Критерий дополняемости подпространства в банаховом пространстве. Дополняемость подпространств конечной размерности и конечной коразмерности.

21. Теоремы о резольвенте и о спектре ограниченного оператора в банаховом пространстве. Спектр и резольвента сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов.

22. Структура спектра ограниченного оператора. Лемма об операторе обратимом слева. Теорема о границе спектра. Структура спектра диагонального оператора в ℓ_p при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

23. Теорема о спектральном радиусе ограниченного оператора. Равенство спектров для эквивалентных операторов. Структура спектра оператора свертки в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ с интегрируемым ядром из $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$.

24. Компактные операторы в нормированных пространствах и их основные свойства. Достаточные условия компактности интегрального оператора в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$.

25. Теорема Ри́сса–Ша́удера о спектре компактного оператора в банаховом пространстве. Теорема Ша́удера о компактности сопряженного оператора.

26. Фредго́льмовы операторы в банаховых пространствах. Лемма о замкнутости их образа. Теорема о каноническом операторе Фредго́льма $A = I - K$, где K — компактный оператор.

27. Три теоремы Фредго́льма о разрешимости линейных уравнений в банаховом пространстве. Теорема об индексе канонического оператора Фредго́льма.

28. Теорема Нико́льского о почти обратимых операторах. Теорема об устойчивости индекса фредго́льмова оператора при компактных возмущениях. Существенный спектр ограниченного оператора.

29. Свойства спектра эрмитова оператора. Критерий Ве́йля. Теорема Ги́льберта–Шми́дта. Интегральное представление резольвенты интегрального оператора Ги́льберта–Шми́дта в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$.

30. Доказательство существования функции Гри́на задачи Шту́рма–Лиуви́лля. Теоремы о существования решения и полноте собственных функций задачи Шту́рма–Лиуви́лля в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$.

Дополнительная литература.

1. Богачев В. И. «Функциональный анализ».
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. «Функциональный анализ».
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В «Элементы теории функций и функционального анализа».
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа».
5. Смирнов В. И. «Курс высшей математики». Том IV.
6. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».
7. Хелемский А. Я. «Лекции по функциональному анализу».

Весна 2020 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*