Программа курса «Функциональный анализ», 2020, 6-й семестр, 2-ой поток

Лектор: проф. А. А. Шкаликов

1. Полинормированные, счетно-нормированные пространства и пространства Фреше. Пространства $\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{E}(\Omega), \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и топология в них.
2. Функционал Минковского. Теорема о метризуемости счетно нормированного пространства.
3. Теорема об оценке линейного нерерывного функционала в пространстве Фреше.
4. Пространства $\mathcal{E}(\Omega)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ являются просранствами Фреше (определить топологию и доказать полноту).
5. Топология в $\mathcal{D}(\Omega)$. Критерий сходимости в $\mathcal{D}(\Omega)$. Операции в пространстве обощенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$.
6. Нетривиальность пространства $\mathcal{D}(\Omega)$. Неметризуемость этого протсранства.
7. Регулярные функции в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Инъективность вложения $L_{1,loc} \to \mathcal{D}'(\Omega)$. (доказательство для случая $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$). Примеры сингулярных обобщенных функций.
8. Носитель обобщенной функции. Компактность носителя для функций из $\mathcal{E}'(\Omega)$. Обратно, любая обобщенная функция с компактным носителем является функиеей из $\mathcal{E}'(\Omega)$.
9. Существование первообразной от обобщенной функции.
10. Теорема о представлении обобщенной функций с компактным носителем (доказательство для случая $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$).
11. Преобразование Фурье осуществляет топологический изоморфизм пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ в себя. Теорема Планшереля. Преобразование Фурье функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
12. Свертка регулярных функций и ее свойства.
13. Прямые произведения и свертки обобщенных функций. Фундаментальные решения.
14. Теорема вложения Соболева (доказательство при $p = 2$).
15. Спектр ограниченного оператора. Тождество Гильберта, аналитичность резольвенты.
16. Аналитичность резольвенты. Спектр ограниченного оператора не пуст.
17. Разложение пространства в прямую сумму ядра оператора и образа сопряженного. Спектр сопряженного оператора.
18. Вольтерровы операторы. Уравнеия Фредгольма первого и второго рода. Однозначная разрешимость уравнения второго рода.
19. Оценки резольвенты оператора вне числового образа (доказательство вместе с леммами).
20. Самосопряженные операторы. Критерий самосопряженности в терминах числового образа.

21. Спектр самосопряженного оператора. Принадлежность спектру экстремальных значений квадратичной формы оператора на единичной сфере. Равенство $r(A) = \|A\|$.
22. Теорема Гильберта–Шмидта для самосопряженных компактных операторов.
23. Теорема Фредгольма.
24. Аналитическая теорема Фредгольма.
25. Теорема Рисса о спектре компактного оператора. Теремы Вейля о спектре возмущения операторов компактными операторами.
26. Классификация спектра. Существенный и дискретный спектры. Примеры. Равенство $\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) \cup \sigma_d(A)$ для самосопряженного оператора.
27. Теоремы об отображении спектра и норме операторного полинома.
28. Теорема о функциональном исчислении непрерывных функций от самосопряженных операторов.
29. Теорема о сильном пределе монотонной последовательности операторов.
30. Существование квадратного корня из положительного оператора и следствия из нее.
31. Схема построения спектральных проекторов E_μ. Спектральная теорема в интегральных терминах. (Схема доказательства).