Программа курса «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» (3 курс, отделение механики)

1. Теорема о пополнении метрического пространства. Принцип сжимающих отображений.
2. Лемма о вложенных шарах. Теорема Бэ́ра о множествах первой категории.
3. Ограниченные множества. Эквивалентность непрерывности и ограниченности для линейных отображений метрических линейных пространств.
4. Принцип равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности системы линейных отображений метрических линейных пространств.
5. Принцип продолжения по непрерывности равномерно непрерывных отображений.
6. Эквивалентные определения компактности. Критерий компактности Хаусдо́рфа.
7. Теорема А́рце́ла–А́ско́ли (критерий предкомпактности множества в $\boldsymbol{C}(X)$).
8. Существование и единственность продолжения меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер (монотонность, полуаддитивность, непрерывность сверху и снизу).
9. Доказательство $\boldsymbol{\sigma}$-аддитивности регулярных мер в $\mathbb{R}^m$. Определение стандартной меры в $\mathbb{R}^m$ и стандартной меры Сти́лтьеса в $\mathbb{R}$.
10. Понятие внешней меры. Свойства измеримых множеств. Теорема Каратеодо́ри.
11. Внешняя мера Лебе́га. Существование и единственность продолжения меры на $\boldsymbol{\sigma}$-алгебру всех измеримых множеств.
12. Лемма об измеримой оболочке. Критерии измеримости Валле́–Пуссе́на. Определение меры Лебе́га в $\mathbb{R}^m$ и меры Лебе́га–Сти́лтьеса в $\mathbb{R}$.
13. Измеримые функции и их свойства. Существование последовательности простых функций, монотонно сходящихся к неотрицательной измеримой функции.
14. Взаимосвязь различных типов сходимости последовательности измеримых функций (почти всюду, по мере и почти равномерно). Теоремы Его́рова и Ри́сса.
15. Интеграл Лебе́га (невырожденность, монотонность, верхняя грань по простым функциям). Теорема о счетной аддитивности интеграла Лебе́га.
16. Теорема о монотонной сходимости интеграла Лебе́га. Свойства линейности и модуля.
17. Лемма Фату́. Теорема Лебе́га о мажорируемой сходимости. Неравенство Чебышёва.
18. Доказательство $\boldsymbol{\sigma}$-аддитивности прямого произведения $\boldsymbol{\sigma}$-аддитивных мер.
19. Вычисление меры множества при помощи сечений. Теорема Фуби́ни.
20. Критерий Лебе́га интегрируемости функций по Ри́ману на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}^m$.
21. Неравенства Гёльдера, Минко́вского и обобщенное неравенство Минко́вского.
22. Пространства $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Теорема о полноте этих пространств.
23. Теорема Штейнга́уза о представлении непрерывных линейных функционалов в $\boldsymbol{L}_1(X,\mu)$.
24. Теорема Радо́на–Никоди́ма (доказательство только единственности). Критерий абсолютной непрерывности заряда.
25. Функции ограниченной вариации $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$. Определение интегралов Ри́мана–Сти́лтьеса и Лебе́га–Сти́лтьеса. Доказательство их равенства для непрерывных функций.
26. Абсолютно непрерывные функции $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$. Формула Нью́тона–Ле́йбница.
27. Локально выпуклые пространства (топология, отделимость и непрерывные отображения). Теорема о метризуемости.
28. Индуктивный предел локально выпуклых пространств (совпадение сужения топологии с топологией подпространств, отделимость и непрерывные отображения).
29. Пространство $\mathscr{D}(X)$ основных функций на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$. Его ограниченные множества и полнота. Теорема о слабой* полноте сопряженного пространства $\mathscr{D}'(X)$.
30. Действия с обобщенными функциями в пространстве $\mathscr{D}'(X)$ (умножение на функцию из $\boldsymbol{C}^\infty(X)$, дифференцирование, сдвиг, растяжение и замена переменных).

31. Теорема об обобщенных функциях с компактным носителем. Доказательство инъективности и непрерывности вложения $\mathscr{E}'(X) \hookrightarrow \mathscr{D}'(X)$.

32. Усреднение функции в смысле Со́болева. Теорема о плотности основных функций $\mathscr{D}(X)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

33. Регулярные обобщенные функции в пространстве $\mathscr{D}'(X)$. Доказательство инъективности и непрерывности вложения $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X) \hookrightarrow \mathscr{D}'(X)$.

34. Производные в смысле Со́болева локально интегрируемых функций. Доказательство полноты пространства Со́болева $\mathscr{W}_p^k(X)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $k \in \mathbb{N}$.

35. Локально абсолютно непрерывные функции $F \in \boldsymbol{AC}_{\ell oc}(X)$ на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$. Необходимые и достаточные условия существования производной в смысле Соболева.

36. Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Доказательство инъективности и непрерывности вложения $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$.

37. Непрерывность и биективность преобразования Фурье́ в пространстве Шва́рца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

38. Преобразования Фурье́ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ (биективность, непрерывность, сдвиг, замена переменных и дифференцирование).

39. Лемма Ри́мана–Лебе́га. Условие Ди́ни обращения преобразования Фурье в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$.

40. Преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ (формулы умножения, обращения, дифференцирования и свертки).

41. Теорема Планшере́ля. Преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ (формулы умножения, обращения и свертки).

42. Ортогональность и полнота системы функций Эрми́та в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Теорема о том, что функции Эрми́та являются собственными функциями оператора Фурье́.

Дополнительная литература.

1. Владимиров В. С. «Обобщенные функции в математической физике».

2. Данфорд Н., Шварц Дж. «Линейные операторы. Т.1».

3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. «Элементы теории функций и функционального анализа».

4. Рид М., Саймон Б. «Методы современной математической физики. Т.1».

5. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».

Осень 2019 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*