Программа курса «Функциональный анализ», 3-й курс, 2-ой поток, 2019

Лектор: проф. А. А. Шкаликов

1. Метрические пространства. Полнота. Сепарабельность. Примеры полных и неполных, сепарабельных и несепарабельных пространств.
2. Лемма о вложенных замкнутых множествах. Теорема Бэра.
3. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза).
4. Теорема об открытости образа сюръективного линейного отображения. Теорема Банаха об обратном операторе.
5. Теорема Банаха об обратном операторе (как следствие теоремы об открытости образа). Теорема о замкнутом графике. Теорема Хелингера-Теплица.
6. Теорема Хана-Банаха для вещественных линейных пространств.
7. Теорема Хана-Банаха для комплексных линейных пространств.
8. Сопряженное к линейному нормированному пространству, его полнота (как следствие теоремы о полноте пространства линейных непрерывных операторов из ЛНП X в банахово пространствоY). Равенство $\dim L = \dim L^*$. Лемма об ε-перпендикуляре. Некопактность единичной сферы в бесконечномерном ЛНП.
9. Изометрическое вложение линейного нормированного пространства во второе сопряженное. Рефлексивные пространства. Примеры рефлексивных и нерефлексивных пространств. Доказать нерефлексивность пространстваа l_1
10. Теорема о сепарабельности линейного нормированного пространства при условии сепарабельности сопряженного.
11. Базисы в банаховом пространстве. Сопряженное к пространству $l_p,\ p \geqslant 1$. Доказать нерефлексивность пространства l_1.
12. Теорема Рисса о пространстве, сопряженном к $C[a,\, b]$.
13. Компакты в топологическом хаусдорфовом пространстве. Их свойства (замкнут, содержит предельные точки, компактность образа при непрерывном отображении. Доказать утверждение: *Полная ограниченность* $\Leftrightarrow$*Секвенциальная предкомпактность*.
14. Критерий компактности в метрическом пространстве (полная ограниченность и полнота).
15. Эквивалентность компактности и счетной компактности в метрическом пространстве.
16. Критерий предкомпактности в l_p, $p \geqslant 1$.

17. Теорема Асколи-Арцела: критерий предкомпактности в $C[0,\, 1]$.

18. Теорема М.Рисса: критерий предкомпактности в $L_p[0,\, 1]$, $p \geqslant 1$ (доказательство для $p = 1$).

19. Предгильбертовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Функционал $\sqrt{(x,\, x)}$ обладает свойством нормы. Лемма Рисса о проекции (существовании и единственности элемента, на котором достигается расстояние до подпространства).

20. Теорема об ортогональном разложении в гильбертовом пространстве.

21. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве, процесс ортогонализации. Теорема Пифагора, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

22. Эквивалентность свойств полноты, замкнутости и выполнения равенства Парсеваля для ортонормированных систем. Эквивалентность первых двух свойств для произвольных систем. Изоморфизм гильбертовых пространств H и H^*.

23. Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Изоморфизм гильбертовых пространств H и H^*.

24. Определение сопряженного оператора, действующего в банаховых пространствах $A : X \to Y$ и равенство $\|A\| = \|A^*\|$.Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Равенство $A = A^{**}$. Равенство $\|A\| = \|A^*\|$.

25. Слабая сходимость и слабая ограниченность. Ограниченность слабо ограниченных множеств в ЛНП.

26. Слабая и $*$-слабая сходимость в банаховом пространстве X. Теорема Банаха-Алаоглу (без доказательства). Доказать, что если X^* сепарабельно, то замкнутый шар в X секвенциально слабо компактен.

27. Секвенциальная слабая компактность единичного шара в гильбертовом пространстве.

28. Компактные операторы. Примеры и свойства компактных операторов. Теорема о равномерном пределе компактных операторов. Доказать, что компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

29. Приближение компактного оператора конечномерными в гильбертовом пространстве. Сопряженный к компактному компактен (доказательство для гильбертова пространства).

30. Спектр и резольвента, их замкнутость и открытость. Непустота спектра. Грубая оценка спектрального радиуса $r(A) \leqslant \|A\|$.