

**Билеты по курсу «Функциональный анализ» (Механики, 6-й семестр)**  
**лектор – профессор В. И. Богачев**

1. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя. Равенство Парсевалья.
2. Существование ортогональной проекции и ортогонального разложения в гильбертовом пространстве.
3. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Примеры базисов. Теорема Рисса–Фишера.
4. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве.
5. Теорема Хана–Банаха (формулировка) и ее следствия. Сопряженное пространство.
6. Сопряженный оператор и его норма. Теорема Банаха–Штейнгауза.
7. Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства) и теорема о замкнутом графике (вывод из теоремы об обратном операторе).
8. Понятие о локально выпуклом пространстве. Пространства  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{S}$  и сходимость в них.
9. Обобщенные функции классов  $\mathcal{D}'$  и  $\mathcal{S}'$  и обобщенные производные. Примеры.
10. Преобразование Фурье в  $L^1$  и его основные свойства. Формула обращения (без доказательства).
11. Равенство Парсевалья для преобразований Фурье. Преобразование Фурье в  $L^2$ .
12. Преобразование Фурье обобщенных функций. Примеры. Применение к решению дифференциальных уравнений.
13. Свертка интегрируемых функций и ее свойства. Свертка обычной и обобщенной функций.
14. Пространства Соболева  $W^{2,k}$ : определения через обобщенные производные и пополнения, описание через преобразование Фурье.
15. Компактные операторы и их свойства. Примеры компактных и некомпактных операторов.
16. Спектр оператора. Обратимость оператора  $A + D$  для обратимого оператора  $A$  при  $\|D\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ . Компактность спектра.
17. Спектр оператора умножения на функцию. Спектр диагонального оператора. Спектр компактного оператора и альтернатива Фредгольма (без доказательства). Применения к интегральным уравнениям.
18. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве и их квадратичные формы. Критерий Вейля и вещественность спектра самосопряженного оператора.
19. Равенства  $\|A\| = \sup\{|(Ax, x)|, \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda|: \lambda - \text{точка спектра } A\}$  для самосопряженного оператора  $A$ .
20. Теорема Гильберта–Шмидта.
21. Унитарные операторы и унитарная эквивалентность операторов. Спектр унитарного оператора. Эквивалентность общего самосопряженного оператора оператору умножения на функцию (без доказательства).