

ЗАДАЧИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ,

предлагавшиеся на лекциях для I потока математиков, весенний семестр 2019 г..

Лектор А.Я.Хелемский.

1. Проверить, что $\ell_1(\mathbb{Z})$ с умножением “свертка” — банахова алгебра.
2. Любой непустой компакт в \mathbb{C} есть спектр некоторого элемента банаховой алгебры и даже оператора в гильбертовом пространстве.
3. Найти спектр оператора неопределенного интегрирования.
4. Банахово тело изометрически изоморфно \mathbb{C} .
5. Классическая сходимость последовательностей в $C^\infty[a, b]$ не может быть задана с помощью одной нормы.
6. Вейерштрассова сходимость последовательностей в $\mathcal{O}(\mathbb{D}^0)$ не может быть задана с помощью одной нормы.
7. Покоординатная сходимость последовательностей в c_∞ не может быть задана с помощью одной нормы.
8. Описать сходящиеся последовательности в сильнейших полинормированных пространствах.
9. Хаусдорфово полинормированное пространство нормируемо \iff его система преднорм содержит эквивалентную ей конечную подсистему.
10. Хаусдорфово полинормированное пространство метризуемо \iff его система преднорм содержит эквивалентную ей не более чем счетную подсистему.
11. Оператор дифференцирования в $\mathcal{O}(\mathbb{D}^0)$ непрерывен.
12. Оператор покоординатного умножения на последовательность в c_∞ непрерывен.
13. Операторы умножения слева и справа на ограниченный оператор в полинормированных пространствах $(\mathcal{B}(H), so)$ и $(\mathcal{B}(H), wo)$ непрерывны.
- 14*. В ℓ_1 нормовая и слабая сходимости *последовательностей* совпадают.
15. Из ограниченной по норме последовательности в пространстве, сопряженном к сепарабельному, можно выделить слабо* сходящуюся подпоследовательность.
16. В рефлексивном банаховом пространстве слабая и слабая* топологии совпадают.
17. Если полинормированное пространство E хаусдорфово, то $(E, w^*)^*$ линейно изоморфно самому E .
18. Последовательность φ_n сходится в $\mathcal{S} \iff t^p \varphi_n(t); t \in \mathbb{R}$ сходится классически.
19. В пространстве \mathcal{D} топология \mathbf{d} строго сильнее топологии \mathbf{s} , а последняя строго сильнее топологии \mathbf{e} .
20. Ни одно из трех пространств пробных функции не нормируемо.
21. Пространства \mathcal{S} и \mathcal{E} метризуемы.
22. Пространство \mathcal{D} не метризуемо.

23. \mathcal{D} плотно в \mathcal{S} , а \mathcal{S} плотно в \mathcal{E} .
24. Оператор дифференцирования в \mathcal{S} и \mathcal{E} непрерывен.
25. Оператор умножения на гладкую функцию в \mathcal{D} и \mathcal{E} непрерывен.
26. Оператор умножения на умеренно растущую гладкую функцию в \mathcal{S} непрерывен.
27. Функционал $\varphi \mapsto v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t} dt$ – это обобщенная функция порядка 1.
27. Функционал $\varphi \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$ – это обобщенная функция бесконечного порядка.
28. Непрерывная функция порождает регулярную обобщенную-функцию-с-компактным носителем \iff она имеет компактный носитель.
29. Последовательность горбушек, сосредоточенных на отрезках $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$; $n = 1, 2, \dots$ и имеющих интеграл 1, сходится в \mathcal{D}^* к δ -функции
30. Всякая регулярная обобщенная функция есть $(m + 1)$ -кратная производная от некоторой m раз гладкой регулярной обобщенной функции.
31. Найти производную функции Хевисайда.
- 31*. Найти производную функции $\ln |t|$.
33. Любая обобщенная функция обладает первообразной, и все её первообразные отличаются на постоянную.
34. Определить оператор дифференцирования в \mathcal{S}^* .
35. Определить оператор умножения на гладкую функцию в \mathcal{D}^* .
- 36*. Любая обобщенная функция, сосредоточенная в нуле, есть линейная комбинация δ -функции и её производных.
37. Если T самосопряжен, то $\|T^n\| = \|T\|^n$.
38. Любой компакт в \mathbb{R} есть спектр некоторого самосопряженного оператора.
- 39-40. Для непрерывной функции на спектре, содержащем спектр данного оператора, найти её значение от проектора и оператора умножения на независимую переменную
41. Для $T \geq 0$ единственный положительный оператор, дающий в квадрате T – это \sqrt{T} .
- 42*. Сформулировать и доказать закон об отображении спектров для непрерывного функционального исчисления.
- 43*. Если T самосопряжен, то $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle|; \|x\| \leq 1\}$.
44. Найти семейство подпространств, ассоциированных с проектором, с оператором умножения на независимую переменную в $L_2[a, b]$ и с компактным самосопряженным диагональным оператором в ℓ_2 .
- 45**. Охарактеризовать точечный спектр самосопряженного оператора в терминах ассоциированного семейства подпространств.
- 46-48. Проверить, что спектральная теорема в её аналитической форме верна для проектора, оператора умножения на независимую переменную в $L_2[a, b]$ и компактного самосопряженного оператора в ℓ_2 .

49-50. Проверить, что спектральная теорема в её геометрической форме верна для проектора и компактного самосопряженного оператора в l_2 .

51. Найти преобразование Фурье ступеньки и проверить, что эта функция не интегрируема по Лебегу.

52. Найти преобразование Фурье первых четырех функций Эрмита.

53. Если $e^{b|t|}\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}); b > 0$, то $F(\varphi)$ продолжается до голоморфной функции в полосе $\{z : |Im(z)| < b\}$.

54. Если $e^{b|t|}\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}); b > 0$, и $\int_{\mathbb{R}} t^n \varphi(t) dt = 0; n = 0, 1, 2, \dots$, то $\varphi = 0$ почти всюду.

55. Система Эрмита является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R})$.

56. Указать коммутативные диаграммы, связывающие классическое преобразование Фурье, оператор сдвига и оператор умножения на e^{-iat} .

57. Свёртка горбушки со ступенькой даёт шляпу.

58. Свёртка функции из $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ с функцией $\psi \in \mathcal{D}$ даёт функцию из \mathcal{E} . При этом $(\varphi * \psi)' = \varphi * \psi'$.

59. Свёртка функции из $L_1(\mathbb{R})$ с функцией из $L_\infty(\mathbb{R})$ существует, ограничена и равномерно непрерывна.

60*. Свёртка функции из $L_1(\mathbb{R})$ с функцией из $L_2(\mathbb{R})$ существует и принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

61. $L_1(\mathbb{R})$ – это банахова алгебра со свёрточным умножением.

62. Оператор $\sqrt{2\pi}F : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ – это гомоморфизм банаховых алгебр.

63. Верно ли следующее утверждение: если $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ и $\int_{\mathbb{R}} t^n \varphi(t) dt = 0; n = 0, 1, 2, \dots$, то $\varphi = 0$ почти всюду?

64*. Не существует слабо* непрерывного оператора в \mathcal{D}^* , продолжающего преобразование Фурье в \mathcal{S} .

65. Разновидность теоремы обращения: если $F(\varphi)$ интегрируема, то $\check{F}F\varphi = \varphi$ почти всюду.

66. Указать коммутативные диаграммы, связывающие преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, оператор сдвига и оператор умножения на e^{-iat} .

67. Найти оператор в ℓ_2 , являющийся моделью преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.

68. Найти оператор в $L_2[a, b]$, являющийся моделью преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.

69**. Множество функций вида $\varphi * \psi; \varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R})$ есть в точности образ классического преобразования Фурье.