ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.

Лекции для I потока математиков, весенний семестр 2019 г..

Лектор А.Я.Хелемский.

1. Банахова алгебра. Открытость множества ее обратимых элементов и непрерывность перехода к обратному элементу. Ограниченность и замкнутость спектра элемента банаховой алгебры. Местоположение спектра унитарного оператора.

2. Резольвентная функция и тождество Гильберта. Теорема о непустоте спектра. Формула спектрального радиуса (без док.). Функциональная банахова алгебра. Теорема Гельфанда (без док.).

3. Полинормированное пространство. Примеры. Топология полинормированного пространства. Сходимость последовательностей и условие хаусдорфовости в терминах преднорм.

4. Условие непрерывности оператора, действующего между полинормированными пространствами, в терминах преднорм. Сравнение топологий, заданных двумя системами преднорм. Непрерывность оператора дифференцирования в $C^\infty[a,b]$.

5. Достаточность семейства непрерывных функционалов на хаусдорфовом полинормированном пространстве. Слабая топология в полинормированном пространстве и слабая* топология в пространстве, сопряженном к полинормированному. Сравнение слабой топологии в нормированном пространстве с исходной.

6. Условие выражения функционала в виде линейной комбинации других функционалов. Описание функционалов, непрерывных в слабой и непрерывных в слабой* топологии.

7. Слабая* непрерывность оператора, сопряженного к непрерывному оператору между преднормированными пространствами. Достаточное условие слабой* плотности подпространства сопряженного пространства.
Теорема Банаха-Алаоглу (без док.).

8. Пространство $\mathcal{D}$. Примеры функций из $\mathcal{D}$ (горбушка и шляпа). Система преднорм в $\mathcal{D}$. Полинормированные пространства $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$. Сходящиеся последовательности в $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$.

9. Хаусдорфовость пространств $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$. Сравнение их топологий. Непрерывность оператора дифференцирования в $\mathcal{D}$.

10. Пространства обобщенных функций $\mathcal{D}^*$, $\mathcal{S}^*$ и $\mathcal{E}^*$. Условие непрерывности функционала на $\mathcal{D}$ и на $\mathcal{E}$. Пространство $L_1^{lok}(\mathbb{R})$ и его вложение в $\mathcal{D}^*$. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. δ-функция и ее сингулярность.

11. Топология в пространствах обобщенных функций. Плотность $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}^*$. Существование и единственность обобщенной производной.

12. Вложение $\mathcal{E}^*$ в $\mathcal{D}^*$. Носители обобщенной функции. Два подхода к понятию обобщенной функции с компактным носителем. Теорема об описании обобщенных функций с компактным носителем в терминах обобщенных производных (без док.).

13. C^*–тождество. Достаточное условие обратимости самосопряженного оператора. Местоположение спектра самосопряженного оператора.

14. Выражение для нормы многочлена от самосопряженного оператора. Непрерывное функциональное исчисление от самосопряженного оператора и его свойства.

15. Положительный оператор. Квадратичная форма оператора и полярное тождество. Арифметический квадратный корень из положительного оператора. Свойства оператора, эквивалентные его положительности.

16. Положительная и отрицательная части самосопряженного оператора. Семейство подпространств, ассоциированное с самосопряженным оператором. Разложение единицы самосопряженного оператора. Спектральная теорема Гильберта в аналитической и геометрической форме (без док.).

17. Классическое преобразование Фурье как оператор из $L_1(\mathbb{R})$ в $C_0(\mathbb{R})$. Его инъективность и плотность образа (без док.). Связь между операциями дифференцирования и умножения на независимую переменную, осуществляемая с помощью преобразования Фурье.

18. Определение свертки. Свертка функций из $L_1(\mathbb{R})$. Связь свертки и поточечного умножения, осуществляемая с помощью преобразования Фурье.

19. Оператор Фурье в пространстве $\mathcal{S}$. Его непрерывность. Обратный оператор Фурье в $\mathcal{S}$ и теорема обращения.

20. Существование и единственность преобразования Фурье в $\mathcal{S}^*$. Его непрерывная обратимость. Преобразование Фурье δ-функции. Доказательство теоремы единственности классического преобразования Фурье.

21. Оператор Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ и теорема Планшереля.

22. Функции Эрмита как собственные функции оператора Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ и соответствующие собственные значения. Спектр этого оператора.