ПРОГРАММА КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

(*3 курс, специальность матметоды экономики*)

1. Метрические и нормированные пространства. Ба́наховы пространства. Доказательство полноты пространств $\boldsymbol{B}(X)$ и $\boldsymbol{C}(X)$. Теорема о пополнении метрических пространств.

2. Открытые, замкнутые, всюду плотные и нигде не плотные множества в метрическом пространстве. Принцип сжимающих отображений. Теорема Бэ́ра о категории.

3. Метрические линейные пространства. Пространства Фреше́. Эквивалентные определения непрерывности линейных отображений метрических линейных пространств.

4. Ограниченные множества в метрическом линейном пространстве. Принцип равностепенной непрерывности линейных отображений метрических линейных пространств.

5. Вполне ограниченные множества. Эквивалентные определения компактности множества в метрическом пространстве. Критерий компактности Хаусдо́рфа.

6. Свойства непрерывных отображений, заданных на компактном множестве метрического пространства. Принцип продолжения по непрерывности равномерно непрерывных отображений.

7. Критерий предкомпактности множества в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$ $(0 < p < \infty)$. Критерий предкомпактности множества в пространстве $\boldsymbol{C}(K)$ (теорема А́рце́ла–Аско́ли).

8. Изоморфизм конечномерных нормированных пространств. Теоремы о существовании и единственности наилучшего приближения в нормированном пространстве.

9. Лемма Ри́сса о почти перпендикуляре. Необходимое и достаточное условие компактности единичного шара в нормированном пространстве.

10. Теорема о полноте пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченных операторов. Теорема Ба́наха–Штейнга́уза. Норма оператора умножения на функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_p[a,b]$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

11. Упорядоченные множества. Лемма Цо́рна. Теорема Ха́на–Ба́наха о продолжении функционалов и ее следствие для нормированных пространств.

12. Теорема Ри́сса о представлении ограниченных функционалов в пространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$. Сопряженное пространство $\boldsymbol{C}^*[a,b]$. Сопряженное пространство $\boldsymbol{L}_p^*[a,b]$ при $1 \leqslant p < \infty$ (без доказательства).

13. Равномерная, сильной и слабая сходимость последовательности операторов в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. Критерий сильной сходимости в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

14. Каноническое вложение нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ во второе сопряженное $\boldsymbol{E}^{**}$. Критерий слабой сходимости элементов в $\boldsymbol{E}$ и слабой* сходимости функционалов в $\boldsymbol{E}^*$.

15. Лемма о метризуемости слабой* сходимости в единичном шаре $\boldsymbol{S}^* \subset \boldsymbol{E}^*$ сопряженного пространства к сепарабельному банахову пространству $\boldsymbol{E}$. Теорема о слабой* компактности $\boldsymbol{S}^*$.

16. Евклидовы пространства. Неравенство Коши́–Буняко́вского, неравенство треугольника, неравенство Бе́ппо Ле́ви. Доказательство строгой нормируемости евклидова пространства.

17. Гильбертовы пространства. Существование и единственность наилучшего приближения замкнутым подпространством. Формула величины наилучшего приближения конечномерным подпространством.

18. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства и ее следствие. Теорема о представлении ограниченных функционалов в гильбертовом пространстве.

19. Ортонормированные системы. Неравенство Бе́сселя. Равенство Парсева́ля. Теорема Стекло́ва о полноте ортонормированных систем. Полнота тригонометрической системы в пространстве $\boldsymbol{L}_2[-\pi,\pi]$.

20. Метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта. Теорема Ри́сса–Фи́шера о изометрическом изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

21. Определение преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$. Лемма Ри́мана–Лебе́га. Условие Ди́ни. Формулы умножения, дифференцирования и свертки в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$.

22. Свойство биективности преобразования Фурье́ в пространстве Шва́рца $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Преобразования Фурье́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Теорема Планшере́ля. Формулы умножения, обращения и свертки в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

23. Ортогональность и полнота системы функций Эрми́та в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Доказательство того, что функции Эрми́та являются собственными функциями оператора Фурье́.

24. Необходимые и достаточные условия существования конечных биортогональных систем. Определение ядра и образа линейного оператора. Необходимые и достаточные условия биективности линейного оператора. Доказательство линейности обратного оператора.

25. Определение сопряженного оператора к ограниченному оператору в нормированных пространствах. Аннуляторы множеств. Соотношения между ядром и образом оператора и его сопряженного.

26. Доказательство полноты произведения банаховых пространств. Определение замкнутости и замыкания линейного оператора. Теорема Ба́наха о замкнутом графике.

27. Определение эрмитово-сопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Свойства линейности, существования, замкнутости и ограниченности. Теорема Хе́ллингера–Те́плица.

28. Теорема Ба́наха об обратном операторе. Доказательство полноты факторпространства банахова пространства по замкнутому подпространству. Теорема о гомоморфизме.

29. Теорема о тройке. Лемма о бианнуляторе. Доказательство формул $\mathrm{Im}A = (\ker A^*)_\perp$ и $\mathrm{Im}A^* = (\ker A)^\perp$ для ограниченных операторов A в банаховых пространствах с замкнутым образом $\mathrm{Im}A$.

30. Определение и свойства проектора. Необходимое и достаточное условие дополняемости подпространства в банаховом пространстве. Дополняемость замкнутого подпространства в том случае, когда оно имеет конечную размерность или конечную коразмерность.

31. Теоремы о резольвенте и о спектре ограниченного оператора в банаховом пространстве. Спектр и резольвента сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов.

32. Определение точечного, непрерывного, остаточного, предельного и дефектного спектров ограниченного оператора в банаховом пространстве. Теорема о границе спектра.

33. Теорема о спектральном радиусе ограниченного оператора. Структура спектра оператора свертки в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ с интегрируемым ядром.

34. Определение и основные свойства компактных операторов в банаховых пространствах. Достаточные условия компактности интегрального оператора в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$.

35. Теорема Ри́сса–Ша́удера о спектре компактного оператора в банаховом пространстве. Необходимые и достаточные условия компактности сопряженного оператора (теорема Ша́удера).

36. Фредго́льмовы операторы в банаховых пространствах. Лемма о замкнутости их образа. Теорема о каноническом операторе Фредго́льма $A = I - K$, где K — компактный оператор.

37. Теоремы Фредго́льма о разрешимости линейных уравнений в банаховом пространстве. Теорема об индексе канонического оператора Фредго́льма.

38. Теорема Нико́льского о почти обратимых операторах. Теорема об устойчивости при компактных возмущениях. Существенный спектр ограниченного оператора.

39. Свойства спектра эрмитова оператора. Критерий Ве́йля. Теорема Ги́льберта–Шми́дта о компактном эрмитовом операторе. Представление резольвенты интегрального оператора Ги́льберта–Шми́дта.

40. Доказательство существования функции Гри́на задачи Шту́рма–Лиуви́лля. Теоремы о существования решения и полноте собственных функций задачи Шту́рма–Лиуви́лля в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$.

Дополнительная литература.

1. Богачев В. И., Смолянов О. Г. «Действительный и функциональный анализ».
2. Данфорд Н., Шварц Дж. «Линейные операторы». Том I.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. «Функциональный анализ».
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В «Элементы теории функций и функционального анализа».
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа».
6. Смирнов В. И. «Курс высшей математики». Том IV.
7. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».
8. Хелемский А. Я. «Лекции по функциональному анализу».

Осень 2018 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*