Билеты к курсу «Функциональный анализ» (Механики, 5-й семестр)

1. Метрические, нормированные и евклидовы пространства. Пространства l^2 и $C[a,b]$.
2. Полные пространства. Примеры. Существование пополнения.
3. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра.
4. Непрерывные отображения. Теорема о сжимающих отображениях.
5. Компакты и их свойства. Вполне ограниченные множества. Критерий вполне ограниченности в терминах последовательностей.
6. Равносильность разных определений компакта в метрическом пространстве (три равносильных описания).
7. Критерии компактности в $C[a,b]$ (теорема Асколи – Арцела) и в l^2.
8. Алгебры и σ-алгебры множеств; σ-алгебра, порожденная классом множеств. Борелевская σ-алгебра.
9. Аддитивные и счетно-аддитивные меры. Критерий счетной аддитивности. Счетная аддитивность меры с приближающим компактным классом.
10. Задача продолжения меры с алгебры. Внешняя мера. Измеримые множества. Счетная аддитивность внешней меры на σ-алгебре измеримых множеств (формулировка теоремы). Единственность продолжения.
11. Построение классической меры Лебега на отрезке, прямой и в $\mathbf{R}^n$. Основные свойства меры Лебега.
12. Функции, измеримые относительно σ-алгебры и измеримые относительно меры. Свойства измеримых функций (операции над измеримыми функциями).
13. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова.
14. Определение интеграла Лебега (простые функции, неотрицательные функции, общий случай). Монотонность и линейность интеграла Лебега (формулировки).
15. Неравенство Чебышёва.
16. Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости (формулировки).
17. Критерий интегрируемости по Лебегу в терминах рядов.
18. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана (собственным и несобственным).
19. Пространства L^1 и L^2 и их полнота.
20. Произведение пространств с мерами и теорема Фубини (конструкция произведения и формулировка результата).
21. Абсолютно непрерывные функции, их связь с неопределенными интегралами интегрируемых функций и формула Ньютона – Лейбница (формулировки). Формула интегрирования по частям для абсолютно непрерывных функций.

Зав. кафедрой
теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор Б.С. Кашин

лектор, профессор В.И. Богачев