

## ЗАДАЧИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ,

предлагавшиеся на лекциях для I потока математиков, осенний семестр 2018 г..

Лектор А.Я.Хелемский.

1. Восстанавливается ли сопряженно-билинейный функционал по своей квадратичной форме в случае действительного поля скаляров?

2. Если норма гильбертова, то из  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  следует, что  $x$  и  $y$  пропорциональны.

3. Норма в  $C[a, b]$  и  $L_1[a, b]$  не гильбертова.

4. Ближайших точек до вектора в подпространстве нормированного пространства может быть много.

5. Система Радемахера не тотальна.

6-8. Найти норму диагонального оператора в  $l_p$ ;  $p = 1, 2, \infty$ , оператора умножения на функцию в  $L_p[a, b]$ ;  $p = 1, 2, \infty$  и оператора неопределенного интегрирования в  $C[a, b]$  и  $L_1[a, b]$ .

9-12. Для диагонального оператора, операторов левого и правого сдвига в  $l_p$ ;  $p = 1, 2, \infty$ , оператора сдвига в  $l_p(\mathbb{Z})$ ;  $p = 1, 2, \infty$  и оператора умножения на функцию в  $L_2[a, b]$  узнать, когда они являются изометрическими, коизометрическими, изометрическими изоморфизмами, топологическими изоморфизмами.

13-15. Найти общий вид ограниченных функционалов на  $c_0$ ,  $l_1$  и  $l_2$ .

16-18. Когда заданный функционал на оси абсцисс в  $\mathbb{R}_1^2$ ,  $\mathbb{R}_2^2$  и  $\mathbb{R}_\infty^2$  обладает единственным сохраняющим норму продолжением?

19-21. В метрическом пространстве измеримых функций на отрезке не существует ненулевых непрерывных функционалов.

22. Пусть  $E$  - нормированное пространство,  $E_0$  - его замкнутое подпространство,  $x \in E \setminus E_0$ . Тогда существует ограниченный функционал на  $E$ , равный нулю на  $E_0$  и отличный от нуля на  $x$ .

23. Ближайших точек до вектора в подпространстве почти-гильбертова пространства может не существовать.

24-26. Найти банаховы сопряженные операторы к диагональному оператору, оператору левого сдвига и оператору правого сдвига в  $c_0$ .

27-29. То же, для  $l_1$ .

30-32. То же, для  $l_2$ .

33. Банахов сопряженный и гильбертов сопряженный к оператору  $i\mathbf{1}$  в  $l_2$  не являются унитарно эквивалентными.

34-39. Найти гильбертов сопряженный для диагонального оператора в  $l_2$ , операторов левого и правого сдвига в  $l_2$ , оператора сдвига в  $l_2(\mathbb{Z})$ , оператора умножения на функцию в  $L_2[a, b]$  и оператора неопределенного интегрирования в  $L_2[a, b]$ .

40. Верно ли, что ортогональное дополнение к ядру оператора всегда есть образ его гильбертова сопряженного оператора?

41. Охарактеризовать в алгебраических терминах унитарный оператор.

42. Оператор в гильбертовом пространстве равен своему сопряженному и своему обратному. Как он действует?

43-45. Как действует оператор  $V$ , такой, что  $V^*V = \mathbf{1}$ ?  $VV^* = \mathbf{1}$ ?  
 $V^*VV^*V = V^*V$ ?

46. Верна ли теорема Банаха-Штейнхауса без предположения о полноте заданного пространства?

47. Привести пример раздельно, но не совместно ограниченного билинейного оператора между нормированными пространствами.

48. Верна ли теорема Банаха об обратном операторе без предположения о полноте обоих заданных пространств?

49. Если норма – гильбертова, то такова же норма в пополнении.

50. Если два непрерывных отображения в хаусдорфово пространство совпадают на плотном подмножестве, то они равны.

51-54. Показать, не используя теорему Рисса, что единичный шар в  $l_p$ ;  $p = 1, 2, \infty$ ,  $C[a, b]$ ,  $L_2[a, b]$  и  $\mathcal{B}(l_2)$  не компактен.

55. Если  $f \in E^*$  таков, что верхняя грань в определении его нормы не достигается, то для любого  $x \in E \setminus Ker(f)$  выполнено  $\|x\| > d(x, Ker(f))$ .

56. Привести пример равномерно ограниченного, но не равномерно непрерывного семейства в  $C[a, b]$ .

57. Охарактеризовать сверхограниченные множества в  $l_2$  в терминах норм “хвостов”.

58. Интегральный оператор в  $L_2[a, b]$  компактен.

59. Доказать равенства:  $\|x \circ y\| = \|x\| \|y\|$ ,  $T(x \circ y) = (Tx \circ y)$ ,  $(x \circ y)T = x \circ T^*y$ ,  $(x \circ y)(u \circ v) = \langle u, y \rangle x \circ v$ ,  $(x \circ y)^* = y \circ x$ .

60. В классе сепарабельных гильбертовых пространств из предложения о модели следует теорема Гильберта-Шмидта.

61. Найти норму оператора неопределенного интегрирования в  $L_2[0, 1]$ .

62. Если  $H_0 \subset H$  инвариантно для  $T : H \rightarrow H$  то  $H_0^\perp$  инвариантно для  $T^*$ .

63. Привести пример фредгольмова оператора с любым наперед заданным целым индексом.

64-65. Когда диагональный оператор фредгольмов? То же для оператора умножения на функцию в  $L_2[a, b]$ .

66. Если  $\lambda \in \sigma_c(T)$ , то существует  $x_n$ ;  $\|x_n\| = 1$ , такая, что  $Tx - \lambda x_n \rightarrow 0$ ;  $n \rightarrow \infty$ .

67. Спектр гильбертова сопряженного оператора к  $T$  есть  $\overline{\sigma(T)}$ .

68. Если  $\lambda \in \sigma_r(T)$ , то  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ .

69. Если  $\lambda \in \sigma_p(T)$ , то  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$  либо  $\bar{\lambda} \in \sigma_r(T^*)$ .

70. Если  $\lambda \in \sigma_c(T)$ , то и  $\bar{\lambda} \in \sigma_c(T^*)$ .

71-72. Найти спектры диагонального оператора, оператора левого и правого сдвига в  $l_2$ .

73. Найти спектр оператора умножения на непрерывную функцию в  $L_2[a, b]$ .

74. В алгебре компактных операторов в бесконечномерном нормированном пространстве нет единицы.

75. Найти спектры элементов алгебр  $\mathbb{C}[t]$ ,  $\mathbb{C}(t)$ ,  $M_n$  и  $\mathbb{C}^X$ .

76. При гомоморфизмах спектр элемента алгебры может сохраниться, а может и уменьшиться.

77. Найти спектр нильпотентного элемента.

Примечание для экзаменаторов. Задачи 74-77 были заданы на последнем занятии.