Программа курса «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»
(3 курс отделения механики, 5 семестр 2017/2018 гг.)[1]

1. Метрические пространства. Принцип сжимающих отображений.
2. Теорема о замкнутых вложенных шарах. Теорема Бэра.
3. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Сепарабельные пространства. Критерий полноты подпространства метрического пространства.
4. Нормированные и банаховы пространства. Теорема о пополнении метрического пространства.
5. Гильбертовы пространства. Тождество параллелограмма. Неравенство Коши-Буняковского. Теорема об ортогональном дополнении.
6. Ортонормированные системы. Неравенство Бесселя. Теорема Рисса-Фишера.
7. Полные, замкнутые системы. Условия, эквивалентные тому, что ортонормированная система образует базис в гильбертовом пространстве.
8. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
9. Компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах. Критерий Хаусдорфа.
10. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
11. Критерий предкомпактности множества в пространствах ℓ_p ($1 \leqslant p < \infty$).
12. Критерий предкомпактности множества в пространстве $C[a, b]$.
13. Системы множеств (полукольцо, кольцо, алгебра, σ-алгебра). Аддитивные и σ-аддитивные меры.
14. Структура минимального кольца, порождённого полукольцом. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо с сохранением σ-аддитивности.
15. Свойства меры на кольце (монотонность, полуаддитивность, σ-полуаддитивность). Связь непрерывности меры с σ-аддитивностью.
16. Счетная аддитивность меры Лебега–Стилтьеса.
17. Внешняя мера Лебега. Свойства внешней меры на $R(S)$. σ-полуаддитивность внешней меры. Измеримые множества относительно заданной внешней меры. Теорема об измеримых по Лебегу множествах (*без доказательства*).
18. Измеримые функции. Свойства измеримых функций (сумма, произведение, верхний и нижний предел последовательности).
19. Сходимость измеримых функций почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере. Связь между сходимостью почти всюду и по мере.
20. Интеграл Лебега для простых функций и его основные свойства.
21. Определение интеграла Лебега для произвольной измеримой функции и его свойства.
22. Теоремы о счетной аддитивности и абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Неравенство Чебышёва.
23. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
24. Теорема Б. Леви и теорема Фату.
25. σ-конечные меры. Интеграл Лебега по σ-конечной мере.
26. Сравнение интегралов Римана и Лебега на отрезке.
27. Несобственный интеграл Римана и интеграл Лебега.
28. Произведение пространств и мер. σ-аддитивность произведения мер. Теорема Фубини (*без доказательства*).
29. Неравенства Гёльдера и Минковского. Нормы в пространствах $L_p(X, \mu)$ и ℓ_p.

[1] см. на обороте

30. Полнота пространств $L_p(X,\mu)$.
31. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов. Непрерывные операторы. Эквивалентность ограниченности и непрерывности для линейных операторов.
32. Полнота пространства $\mathcal{B}(X,Y)$, где Y — банахово. Сопряжённое пространство X^* и его полнота.
33. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в c_0. Полнота пространства ℓ_1.
34. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в ℓ_p при $1 \leqslant p < \infty$. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в $L_p(X,\mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ (*без доказательства*).
35. Теорема Хана–Банаха: случай вещественного сепарабельного нормированного пространства.
36. Теорема Хана–Банаха для комплексного нормированного пространства. Следствия из теоремы Хана–Банаха. Рефлексивные пространства.
37. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
38. Различные виды сходимости в нормированных пространствах. Сравнение сходимостей. Сходимости в пространстве операторов. Сравнение операторных сходимостей.

Лектор, профессор — И.А. Шейпак

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа, академик РАН, профессор — Б. С. Кашин