Экзаменационные вопросы по функциональному анализу
(второй поток третьего курса математиков, первый семестр 2017/18 учебного года)

1. Равносильность счетной компактности и секвенциальной компактности для подмножеств метрических пространств.
2. Доказательство того, что всякое секвенциально компактное подмножество метрического пространства полно и предкомпактно.
3. Доказательство того, что всякое компактное подмножество метрического пространства секвенциально компактно.
4. Доказательство того, что всякое полное предкомпактное подмножество метрического пространства компактно.
5. Теорема о вложенных шарах.
6. Теорема Бэра.
7. Теорема о пополнении метрического пространства.
8. Теорема Банаха–Штейнхауза.
9. Теорема Хана–Банаха для линейных функционалов на линейных пространствах.
10. Теорема Хана–Банаха для линейных функционалов на линейных нормированных пространствах (над полем вещественных чисел).
11. Сохранение нормы при каноническом вложении нормированного линейного пространства в его второе сопряженное.
12. Теорема о пополнении нормированного линейного пространства.
13. Полнота нормированного линейного пространства линейных непрерывных отображений нормированного линейного пространства в банахово пространство.
14. Теорема Банаха о гомоморфизме.
15. Равносильность теорем Банаха об обратном отображении и о замкнутом графике.
16. Лемма о трех гомоморфизмах.
17. Всякий линейный функционал, непрерывный в слабой топологии, является элементом пространства, задающего слабую топологию.
18. Ограниченность слабо сходящейся последовательности в нормированном пространстве.

19. Для подмножеств нормированного линейного пространства ограниченность по норме и слабая ограниченность равносильны.
20. Неравенство Бесселя.
21. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.
22. Если A — линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве, то $\|A\| = \|A^*\|$.
23. Для счетной ортонормированной системы векторов в евклидовом пространстве тотальность, замкнутость и свойство быть базисом равносильны и каждое из этих свойств влечет полноту ортонормированной системы.
24. В гильбертовом пространстве полная ортонормированная система является базисом (теорема Рисса-Фишера).
25. Теорема о существовании проекции на замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства .
26. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве.
27. Пространства $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$. Плотность образов при вложениях $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.
28. Вложение локально интегрируемых функций и локально конечных мер в пространство $\mathcal{D}^*$.
29. Преобразование Фурье интегрируемых функций. Связь дифференцирования и преобразования Фурье.
30. Формула обращения для преобразования Фурье в пространстве $\mathcal{S}$.