Программа курса «Функциональный анализ», 3-й курс, 1-ый поток, 2017

Лектор: проф. А. А. Шкаликов

1. Метрические пространства. Полнота. Сепарабельность. Примеры полных и неполных, сепарабельных и несепарабельных пространств.
2. Лемма о вложенных замкнутых множествах. Теорема Бэра.
3. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза).
4. Теорема Хана-Банаха для вещественных линейных пространств.
5. Теорема Хана-Банаха для комплексных линейных пространств.
6. Сопряженное к линейному нормированному пространству, его полнота. Равенство $\dim L = \dim L^*$.
7. Изометрическое вложение линейного нормированного пространства во второе сопряженное. Рефлексивные пространства. Примеры рефлексивных и нерефлексивных пространств.
8. Теорема о сепарабельности линейного нормированного пространства при условии сепарабельности сопряженного.
9. Базисы в банаховом пространстве. Сопряженное к пространству l_p, $p \geqslant 1$. Доказать нерефлексивность пространства l_1.
10. Теорема Рисса о пространстве, сопряженном к $C[a, b]$.
11. Компакты в топологическом хаусдорфовом пространстве. Их свойства (замкнут, содержит предельные точки, компактность образа при непрерывном отображении, существование максимума и минимума у непрерывной функции на компакте).
12. Критерий компактности в метрическом пространстве (полная ограниченность и полнота).
13. Эквивалентность компактности, счетной компактности и секвенциальной компактности в метрическом пространстве.
14. Критерий предкомпактности в l_p, $p \geqslant 1$.
15. Теорема Асколи-Арцела: критерий предкомпактности в $C[0, 1]$.
16. Теорема М.Рисса: критерий предкомпактности в $L_p[0, 1]$, $p \geqslant 1$ (доказательство для $p = 1$).

17. Предгильбертовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Функционал $\sqrt{(x,\, x)}$ обладает свойством нормы. Лемма Рисса о существовании и единственности элемента, на котором достигается расстояние до подпространства.
18. Теорема об ортогональном разложении в гильбертовом пространстве.
19. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве, процесс ортогонализации. Теорема Пифагора, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
20. Эквивалентность свойств полноты, замкнутости и выполнения равенства Парсеваля для ортонормированных систем.
21. Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Изоморфизм гильбертовых пространств H и H^*.
22. Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Равенство $A = A^{**}$. Равенство $\|A\| = \|A^*\|$. Определение сопряженного оператора, действующего в банаховых пространствах $A:\ X \to Y$ и равенство $\|A\| = \|A^{**}\|$.
23. Лемма о почти перпендикуляре. Усиленная версия леммы для конечномерного подпространства. Некомпактность единичной сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.
24. Слабая сходимость и слабая ограниченность. Ограниченность слабо ограниченных множеств в ЛНП.
25. Теорема Банаха-Алаоглу (без доказательства). Секвенциальная $*$- слабая компактность замкнутого единичного шара в сепарабельном X. Секвенциальная слабая компактность единичного шара в гильбертовом пространстве.
26. Компактные операторы. Примеры и свойства компактных операторов. Теорема о равномерном пределе компактных операторов. Доказать, что компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.
27. Приближение компактного оператора конечномерными в гильбертовом пространстве. Сопряженный к компактному компактен (доказательство для гильбертова пространства).
28. Теорема об открытости образа сюръективного линейного отображения. Теорема Банаха об обратном операторе.
29. Теорема Банаха об обратном операторе (как следствие теоремы об открытости образа). Теорема о замкнутом графике. Теорема Хелингера-Теплица.
30. Спектр и резольвента, их замкнутость и открытость. Непустота спектра. Оценка $r(A) \leqslant \|A\|$.