П Р О Г Р А М М А   К У Р С А «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

(*3 курс, отделение механики*)

1. Линейные пространства сходимости $(\boldsymbol{E},\zeta_{\boldsymbol{E}})$. Доказательство регулярности сходимости в метрических линейных пространствах и выполнение аксиомы полноты в полных метрических линейных пространствах. Пример нерегулярной сходимости в пространстве $\boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$.

2. Определение сопряженного пространства сходимости $(\boldsymbol{E}',\zeta_{\boldsymbol{E}'})$ к пространству сходимости $(\boldsymbol{E},\zeta_{\boldsymbol{E}})$. Теорема о полноте сопряженного пространства сходимости.

3. Полинормированные пространства $(\boldsymbol{E},\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}})$. Доказательство метризуемости сходимости в счетно-нормированных пространствах. Равносильность непрерывности и ограниченности для линейных отображений, заданных в счетно-нормированных пространствах.

4. Пространство $\mathscr{D}'(X)$ обобщенных функций на множестве $X\subset\mathbb{R}^m$. Доказательство полноты пространства обобщенных функций. Действия с обобщенными функциями из $\mathscr{D}'(X)$.

5. Теорема о локальной структуре обобщенных функций. Доказательство существования первообразной обобщенной функции из $\mathscr{D}'(a,b)$.

6. Определение носителя обобщенной функции. Теорема о структуре обобщенных функций с носителем в точке (без доказательства). Доказательство вложения $\mathscr{E}'(X)\subset\mathscr{D}'(X)$ пространства обобщенных функций с компактным носителем в пространство обобщенных функций.

7. Усреднение функции в смысле Со́болева. Лемма о плотности $\mathscr{D}(X)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X)$ при $1\leqslant p<\infty$. Регулярные обобщенные функции. Доказательство вложения $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)\subset\mathscr{D}'(X)$ пространства локально интегрируемых функций в пространство обобщенных функций.

8. Обобщенные производные в смысле Со́болева. Определение пространства Со́болева $W_p^k(X)$ при $1\leqslant p\leqslant\infty$ и $k\in\mathbb{N}$. Доказательство полноты пространства Со́болева.

9. Определение пространства Шва́рца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Доказательство вложения $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)\subset\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ сопряженного пространства Шва́рца. Действия с обобщенными функциями из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$.

10. Свойства непрерывности и биективности преобразования Фурье́ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Определение преобразования Фурье́ в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$. Свойства преобразования Фурье́ в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$.

11. Определение преобразования Фурье́ в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$. Лемма Ри́мана–Лебе́га. Условие Ди́ни. Формулы умножения, обращения, дифференцирования и свертки в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$.

12. Определение преобразования Фурье́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Теорема Планшере́ля. Доказательство равенства Парсева́ля. Формулы умножения, обращения и свертки в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

13. Ортогональность и полнота системы функций Эрми́та в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Доказательство того, что функции Эрми́та являются собственными функциями оператора Фурье́.

14. Необходимые и достаточные условия существования конечных биортогональных систем. Определение ядра и образа линейного оператора. Необходимые и достаточные условия биективности линейного оператора. Доказательство линейности обратного оператора.

15. Определение и свойства сопряженного оператора A^* для ограниченного оператора A. Аннуляторы множеств в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ и в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}^*$. Соотношения между ядром и образом оператора и его сопряженного.

16. Доказательство полноты произведения двух банаховых пространств $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$. Определение замкнутости и замыкания линейного оператора. Теорема Ба́наха о замкнутом графике.

17. Определение эрмитово-сопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Свойства существования, линейности, замкнутости и ограниченности. Теорема Хе́ллингера–Те́плица.

18. Теорема Ба́наха об обратном операторе. Доказательство полноты факторпространства банахова пространства по замкнутому подпространству. Теорема о гомоморфизме.

19. Теорема о тройке. Лемма о бианнуляторе. Формулы $\mathrm{Im}A=(\ker A^*)_\perp$ и $\mathrm{Im}A^*=(\ker A)^\perp$ для ограниченных операторов A в банаховых пространствах с замкнутым образом $\mathrm{Im}A$.

20. Определение и свойства проекторов. Существование ограниченного проектора на дополняемое подпространство в банаховом пространстве. Доказательство дополняемости замкнутого подпространства $L\subset\boldsymbol{E}$ в случае, когда $\dim L<\infty$ или $\operatorname{codim} L<\infty$.

21. Теорема о резольвенте ограниченного оператора в банаховом пространстве. Свойства спектра и резольвенты. Спектр и резольвента сопряженного оператора.

22. Определение точечного, непрерывного, остаточного, предельного и дефектного спектра для ограниченного оператора в банаховом пространстве. Теорема о границе спектра.

23. Структура спектра оператора свертки в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ с интегрируемым ядром. Теорема о спектральном радиусе ограниченного оператора.

24. Определение и свойства компактных операторов в банаховых пространствах. Теорема Ша́удера о компактности сопряженного оператора.

25. Теорема Ри́сса–Ша́удера о спектре компактного оператора в банаховом пространстве. Достаточные условия компактности интегрального оператора из $\boldsymbol{L}_p([0,1])$ в $\boldsymbol{L}_q([0,1])$.

26. Фредго́льмовы операторы в банаховых пространствах. Лемма о замкнутости их образа. Теорема о каноническом операторе Фредго́льма $A = I - K$, где K — компактный оператор.

27. Теоремы Фредго́льма о разрешимости линейных уравнений в банаховом пространстве. Теорема об индексе канонического оператора Фредго́льма.

28. Определение почти обратимого оператора. Теорема Нико́льского. Теорема об устойчивости при компактных возмущениях. Существенный спектр ограниченного оператора.

29. Свойства спектра эрмитова оператора в гильбертовом пространстве. Критерий Ве́йля. Теорема Ги́льберта–Шми́дта о компактном эрмитовом операторе. Представление резольвенты интегрального оператора Ги́льберта–Шми́дта.

30. Доказательство существования функции Гри́на для задачи Шту́рма–Лиуви́лля. Сведение задачи Шту́рма–Лиуви́лля к аналогичной задаче для интегрального оператора.

Дополнительная литература

1. Богачев В. И., Смолянов О. Г. «Действительный и функциональный анализ».
2. Владимиров В. С. «Обобщенные функции в математической физике».
3. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. «Теоремы и задачи из функционального анализа».
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. «Элементы теории функций и функционального анализа».
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа».
6. Рид М., Саймон Б. «Методы современной математической физики» т.I.
7. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».
8. Хелемский А. Я. «Лекции по функциональному анализу».

Весна 2017 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,

академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*