ПРОГРАММА КУРСА

«*ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ*» (*3 курс, отделение механики*)

1. Метрические и нормированные пространства. Ба́наховы пространства. Доказательство полноты пространств $\boldsymbol{B}(X)$ и $\boldsymbol{C}(X)$. Теорема о пополнении метрического пространства.

2. Открытые, замкнутые, всюду плотные и нигде не плотные множества в метрическом пространстве. Принцип сжимающих отображений. Теорема Бэ́ра о категории.

3. Топологические пространства. Метрические линейные пространства. Пространства Фреше́. Эквивалентные определения непрерывности (линейных) отображений метрических (линейных) пространств.

4. Ограниченные множества в метрическом линейном пространстве. Принцип равностепенной непрерывности линейных отображений метрических линейных пространств.

5. Вполне ограниченные множества. Критерий вполне ограниченности в $\mathbb{R}^n$. Эквивалентные определения компактности множеств в метрическом пространстве. Критерий компактности Хаусдо́рфа.

6. Свойства непрерывных отображений, заданных на компактном множестве. Теорема Алекса́ндрова. Принцип продолжения по непрерывности равномерно непрерывных отображений.

7. Критерий предкомпактности в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$ $(0 < p < \infty)$. Критерий предкомпактности в пространстве $\boldsymbol{B}(X)$ (теорема Ве́реш). Критерий предкомпактности в пространстве $\boldsymbol{C}(K)$ (теорема Арце́ла–Аско́ли).

8. Изоморфизм конечномерных нормированных пространств. Эквивалентность норм. Существование и единственность наилучшего приближения в нормированном пространстве.

9. Лемма Ри́сса о почти перпендикуляре. Необходимое и достаточное условие компактности единичного шара в нормированном пространстве.

10. Определение кольца, алгебры, $\boldsymbol{\sigma}$-кольца, $\boldsymbol{\sigma}$-алгебры. Определение $\boldsymbol{\sigma}$-алгебры боре́левских множеств. Теорема о представлении элементов минимального кольца, порожденного полукольцом множеств.

11. Существование и единственность продолжения меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства $\boldsymbol{\sigma}$-аддитивных мер, в том числе свойства непрерывности сверху и снизу.

12. Понятие внешней меры множества. Свойства измеримых множеств. Теорема Каратеодо́ри.

13. Внешняя мера Лебе́га и ее свойства. Теорема о существовании продолжения меры на $\boldsymbol{\sigma}$-алгебру измеримых множеств. Теорема единственности (без доказательства).

14. Лемма об измеримой оболочке. Критерии измеримости по Лебе́гу и Валле́–Пуссе́ну для множеств конечной меры.

15. Доказательство $\boldsymbol{\sigma}$-аддитивности регулярных мер. Мера Сти́лтьеса и мера Лебе́га–Сти́лтьеса в $\mathbb{R}$. Пример Вита́ли неизмеримого множества на отрезке $[0,1]$.

16. Измеримые функции и их свойства. Существование последовательности простых измеримых функций, монотонно сходящихся к неотрицательной измеримой функции.

17. Взаимосвязь различных типов сходимости последовательности измеримых функций на множестве конечной меры (почти всюду, по мере и почти равномерно). Теорема Его́рова. Пример Ри́сса.

18. Общий критерий измеримости. Критерий измеримости Лу́зина (C-свойство, без доказательства).

19. Интеграл Лебе́га и его свойства. Теорема о монотонной сходимости интеграла Лебе́га.

20. Лемма Фату́. Теорема Лебе́га о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенство Чебышёва. Свойства функции распределения неотрицательной измеримой функции.

21. Прямое произведение мер. Доказательство $\boldsymbol{\sigma}$-аддитивности прямого произведения $\boldsymbol{\sigma}$-аддитивных мер.

22. Вычисление меры в произведении измеримых пространств при помощи сечений. Теорема Фуби́ни.

23. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Сравнение интегралов Ри́мана и Лебе́га на n-мерном отрезке в $\mathbb{R}^n$.

24. Неравенства Гёльдера и Минко́вского. Обобщенное неравенство Минко́вского.

25. Пространства $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $0 < p \leqslant \infty$. Теорема о полноте этих пространств.

26. Теорема о всюду плотности пространства непрерывных функций $\boldsymbol{C}(X)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $0 < p < \infty$. Примеры всюду плотных множеств в пространстве $\boldsymbol{L}_p[0,1]$.

27. Счетная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радо́на–Никоди́ма (доказательство только единственности). Критерий абсолютной непрерывности заряда.

28. Пространство функций ограниченной вариации $\boldsymbol{BV}[a,b]$ на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Разложение Жорда́на. Теорема Лебе́га о существовании производной монотонной функции на отрезке $[a,b]$ (без доказательства). Сравнение интеграла Лебе́га–Сти́лтьеса с интегралом Ри́мана–Сти́лтьеса.

29. Пространство $\boldsymbol{AC}[a,b]$ абсолютно непрерывных функций на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Характеристическое свойство абсолютно непрерывных функций.

30. Теорема о полноте пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченных операторов. Теорема Ба́наха–Штейнга́уза. Норма оператора умножения на функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

31. Лемма Цорна. Теорема Ха́на–Ба́наха о продолжении линейного функционала, заданного на подпространстве, и ее следствие для нормированных пространств.

32. Теорема Ри́сса о представлении ограниченных функционалов в пространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$. Сопряженное пространство $\boldsymbol{C}^*[a,b]$. Сопряженное пространство $\boldsymbol{L}_p^*(X,\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$ (без доказательства).

33. Равномерная и сильной сходимость последовательности ограниченных операторов в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. Свойства и критерий сильной сходимости в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

34. Каноническое вложение нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ во второе сопряженное $\boldsymbol{E}^{**}$. Свойства и критерий слабой* сходимости функционалов в $\boldsymbol{E}^*$ и слабой сходимости элементов в $\boldsymbol{E}$.

35. Лемма о метризуемости слабой* сходимости. Теорема о слабой* компактности единичного шара $\boldsymbol{S}^* \subset \boldsymbol{E}^*$ сопряженного пространства $\boldsymbol{E}^*$ к сепарабельному нормированному пространству $\boldsymbol{E}$.

36. Евклидовы пространства. Неравенства Коши́–Буняко́вского, неравенство треугольника, неравенство Беппо́ Ле́ви. Доказательство строгой нормируемости евклидова пространства.

37. Гильбертовы пространства. Существование и единственность наилучшего приближения замкнутым подпространством. Формула для величины наилучшего приближения конечномерным подпространством.

38. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства и ее следствие. Теорема Ри́сса о представлении ограниченных функционалов в гильбертовом пространстве.

39. Ортонормированные системы. Неравенство Бе́сселя. Равенство Парсева́ля. Теорема Стекло́ва о полноте ортонормированной системы. Полнота тригонометрической системы в пространстве $\boldsymbol{L}_2[-\pi,\pi]$.

40. Метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта. Теорема Ри́сса–Фи́шера о изометрическом изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

Дополнительная литература.

1. Богачев В. И. «Функциональный анализ».
2. Данфорд Н., Шварц Дж. «Линейные операторы».
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. «Функциональный анализ».
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В «Элементы теории функций и функционального анализа».
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа».
6. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».
7. Хелемский А. Я. «Лекции по функциональному анализу».

Осень 2016 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*