ЗАДАЧИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ,

предлагавшиеся на лекциях для I потока математиков, осенний семестр 2016 г..

Лектор А.Я.Хелемский.

1. Любое метрическое пространство изометрически вкладывается в нормированное пространство, а если оно сепарабельно, то в l_∞.

2. Восстанавливается ли сопряженно-билинейный функционал по своей квадратичной форме в случае действительного поля скаляров?

3. Если норма гильбертова, то из $\|x + y = \|x\| + \|y\|$ следует, что x и y пропорциональны.

4. Норма в $C[a, b]$ и $L_1[a, b]$ не гильбертова.

5. Ближайших точек до вектора в подпространстве нормированного пространства может быть много.

6. Система Радемахера не тотальна.

7-9. Найти норму диагонального оператора в $l_p; p = 1, 2, \infty$, оператора умножения на функцию в $L_p[a, b]; p = 1, 2, \infty$ и оператора неопределенного интегрирования в $C[a, b]$ и $L_1[a, b]$.

10-13. Для диагонального оператора, операторов левого и правого сдвига в $l_p; p = 1, 2, \infty$, оператора сдвига в $l_p(\mathbb{Z}); p = 1, 2, \infty$ и оператора умножения на функцию в $L_2[a, b]$ узнать, когда они являются изометрическими, коизометрическими, изометрическими изоморфизмами, топологическими изоморфизмами.

14-16. Найти общий вид ограниченных функционалов на c_0, l_1 и l_2.

17-19. Когда заданный функционал на оси абсцисс или диагонали в $\mathbb{R}^2_1, \mathbb{R}^2_2$ и $\mathbb{R}^2_\infty$ обладает единственным сохраняющим норму продолжением?

20. В метрическом пространстве измеримых функций на отрезке не сущзествует ненулевых непрерывных функционалов.

21. Пусть E - нормированное пространство, E_0 - его замкнутое подпространство, $x \in E \setminus E_0$. Тогда существует ограниченный функционал на E, равный нулю на E_0 и отличный от нуля на x.

22. Ближайших точек до вектора в подпространстве почти-гильбертова пространства может не существовать.

23-25. Найти банаховы сопряженные операторы к диагональному оператору, оператору левого сдвига и оператору правого сдвига в c_0.

26-28. То же, для l_1.

29-31. То же, для l_2.

32. Банахов сопряженный и гильбертов сопряженный к оператору $i\mathbf{1}$ в l_2 не являются унитарно эквивалентными.

33-38. Найти гильбертов сопряженный для диагонального оператора в l_2, операторов левого и правого сдвига в l_2, оператора сдвига в $l_2(\mathbb{Z})$, оператора умножения на функцию в $L_2[a, b]$ и оператора неопределенного интегрирования в $L_2[a, b]$.

39. Верно ли, что ортогональное дополнение к ядру оператора всегда есть образ его гильбертова сопряженного оператора?

40. Охарактеризовать в алгебраических терминах унитарный оператор.

41. Оператор в гильбертовом пространстве равен своему сопряженному и своему обратному. Как он действует?

42-44. Как действует оператор V, такой, что $V^*V = \mathbf{1}$? $VV^* = \mathbf{1}$? $V^*VV^*V = V^*V$?

45. Верна ли теорема Банаха-Штейнхауса без предположения о полноте заданного пространства?

46. Привести пример раздельно, но не совместно ограниченного билинейного оператора между нормированными пространствами.

47. Верна ли теорема Банаха об обратном операторе без предположения о полноте обоих заданных пространств?

48. Если норма – гильбертова, то такова же норма в пополнении.

49. Не существует метрики, задающей поточечную сходимость в $C[a, b]$.

50. Указать топологию, задающую поточечную сходимость в $C[a, b]$.

51. Когда топология предметрического пространства хаусдорфова?

52. Если два непрерывных отображения в хаусдорфово пространство совпадают на плотном подмножестве, то они равны.

53-56. Показать, не используя теорему Рисса, что единичный шар в $l_p; p = 1, 2, \infty, C[a, b], L_2[a, b]$ и $\mathcal{B}(l_2)$ не компактен.

57. Если $f \in E^*$ таков, что верхняя грань в определении его нормы не достигается, то для любого $x \in E \setminus Ker(f)$ выполнено $\|x\| > d(x, Ker(f)$.

58. Привести пример равномерно ограниченного, но не равностепенно непрерывного семейства в $C[a, b]$.

59. Охарактеризовать сверхограниченные множества в l_2 в терминах норм "хвостов".

60. Интегральный оператор в $L_2[a, b]$ компактен.

61. Доказать равенства: $\|x \circ y\| = \|x\|\|y\|, T(x \circ y) = (Tx \circ y), (x \circ y)T = x \circ T^*y, (x \circ y)(u \circ v) = \langle u, y\rangle x \circ v, (x \circ y)^* = y \circ x$.

62. В классе сепарабельных гильбертовых пространств из предложения о модели следует теорема Гильберта-Шмидта.

63. Найти норму оператора неопределенного интегрирования в $L_2[0, 1]$ю

64. Если $H_0 \subset H$ инвариантно для $T : H \to H$ то $H_0^\perp$ инвариантно для T^*.

65. Привести пример фредгольмова оператора с любым наперед заданным целым индексом.

66-67. Когда диагональный оператор фредгольмов ? То же для оператора умножения на функцию в $L_2[a, b]$.

68. Компактный оператор между гильбертовыми пространствами, одно из которых бесконечномерно, не фредгольмов.

69. Если $\lambda \in \sigma_c(T)$, то существует $x_n; ||x_n|| = 1$, такая, что $Tx - \lambda x_n \to 0; n \to \infty$.

70. Спектр гильбертова сопряженного оператора к T есть $\overline{\sigma(T)}$.

71. Если $\lambda \in \sigma_r(T)$, то $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.

72. Если $\lambda \in \sigma_p(T)$, то $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ либо $\overline{\lambda} \in \sigma_r(T^*)$.

73. Если $\lambda \in \sigma_c(T)$, то и $\overline{\lambda} \in \sigma_c(T^*)$.

74-75. Найти спектры диагонального оператора, оператора левого и правого сдвига в l_2.

76. Найти спектр оператора умножения на существенно ограниченную функцию в $L_2[a, b]$.

77. Найти спектр оператора неопределенного интегрирования в $L_2[0, 1]$.

Примечание для экзаменаторов. Задачи 68-77 были заданы на последнем занятии.