Программа курса «Функциональный анализ»
3 курс, отделение «механика», 6 семестр, 2016 год.[1]
Лектор: профессор И. А. Шейпак.

1. Абсолютно непрерывные функции и функции ограниченной вариации и их свойства. Представление функции ограниченной вариации в виде разности двух монотонных.

2. Теорема Рисса об общем виде ограниченных функционалов в пространстве $C[a, b]$.

3. Сопряженный оператор. Самосопряжённые операторы. Равенства $\|A\| = \|A'\|$, $\|A\| = \|A^*\|$.

4. Теорема Банаха–Штейнгауза. Слабо ограниченные множества.

5. Слабая компактность. Теорема о слабой компактности единичного шара в сепарабельном гильбертовом пространстве.

6. Компактные операторы. Свойства компактных операторов (сумма, композиция с ограниченным, предельный переход).

7. Теорема о действии компактного оператора на слабо сходящуюся последовательность в нормированном пространстве.

8. Компактность интегральных операторов в пространствах $C[a; b]$ и $L_2[a; b]$.

9. Теорема о связи компактности оператора с компактностью сопряжённого оператора (в гильбертовом пространстве).

10. Обратный оператор. Теорема Банаха (без доказательства). Обратимость оператора близкого к обратимому.

11. Спектр и резольвентное множество ограниченного оператора. Классификация спектра. Представление резольвенты в виде ряда Лорана (ряд Неймана). Свойства спектра (замкнутость, ограниченность, непустота).

12. Спектр сопряжённого оператора (в гильбертовом пространстве).

13. Нормальный оператор, свойства спектра нормального оператора.

14. Последовательность Вейля. Спектр оператора умножения на существенно ограниченную функцию в $L_2[a; b]$.

15. Квадратичная форма самосопряжённого оператора. Связь квадратичной формы со спектром и нормой самосопряжённого оператора.

16. Теорема об отображении спектра для многочлена от оператора.

17. Спектральный радиус оператора. Формула для вычисления спектрального радиуса. Спектральный радиус самосопряжённого оператора.

18. Теорема Гильберта-Шмидта.

19. Замкнутость образа оператора $I - A$, где A — компактный оператор. Первая теорема Фредгольма.

20. Вторая теорема Фредгольма.

21. Третья теорема Фредгольма.

22. Спектр компактного оператора.

[1] см. на обороте

23. Основные пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$. Сходимость в этих пространствах. Пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$.

24. Плотность $\mathcal{D}$ в S и $L_1(\mathbb{R})$.

25. Сингулярные и регулярный обобщенные функции. Сингулярность δ-функции.

26. Плотность $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}'$. Сходимость в $\mathcal{D}'$.

27. Действия над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных.

28. Решение простейших дифференциальных уравнения в пространстве обобщённых функций ($y' = 0$, $xy = 0$). Существование первообразной в $\mathcal{D}'$.

29. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его свойства.

30. Теорема о связи гладкости интегрируемой функции со скоростью убывания её преобразования Фурье. Теорема о связи скорости убывания интегрируемой функции с гладкостью преобразования Фурье.

31. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}$ и его непрерывность. Равенство Парсеваля для интегралов Фурье. Формула обращения.

32. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$. Инъективность преобразования Фурье в $L_1(\mathbb{R})$.

33. Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, теорема Планшереля.

34. Унитарные операторы. Спектр унитарных операторов. Спектр оператора преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.

35. Полнота системы функций Чебышёва–Эрмита в $L_2(\mathbb{R})$.

36. Свёртка функций из $L_1(\mathbb{R})$. Свойства свёртки (линейность, ассоциативность, дифференцируемость, связь с преобразованием Фурье).

37. Свёртка обычной и обобщенной функций. Использование преобразования Фурье и свёртки для решения уравнения теплопроводности.

38. Оператор свёртки с интегрируемой функцией в $L_2(\mathbb{R})$. Спектр оператора свёртки.

Лектор, профессор И.А. Шейпак

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа, академик РАН, профессор Б. С. Кашин