Программа курса «Функциональный анализ», 2016, 6-й семестр, 2-ой поток

Лектор: проф. А. А. Шкаликов

1. Спектр ограниченного оператора. Тождество Гильберта, аналитичность резольвенты.
2. Аналитичность резольвенты. Спектр ограниченного оператора не пуст.
3. Разложение пространства в прямую сумму ядра оператора и образа сопряженного. Спектр сопряженного оператора.
4. Вольтерровы операторы. Уравнеия Фредгольма первого и второго рода. Однозначная разрешимость уравнения второго рода.
5. Теорема Теплица–Хаусдорфа о выпуклости числового образа оператора и следствия из нее.
6. Оценки резольвенты оператора вне числового образа (доказательство вместе с леммами).
7. Самосопряженные операторы. Критерий самосопряженности в терминах числового образа.
8. Спектр самосопряженного оператора. Принадлежность спектру экстремальных значений квадратичной формы оператора на единичной сфере. Равенство $r(A) = \|A\|$.
9. Теорема Гильберта–Шмидта для самосопряженных компактных операторов.
10. Теорема Фредгольма.
11. Аналитическая теорема Фредгольма.
12. Теорема Рисса о спектре компактного оператора.
13. Классификация спектра. Существенный и дискретный спектры. Примеры. Равенство $\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) \cup \sigma_d(A)$ для самосопряженного оператора.
14. Теорема Вейля о сохранении существенного спектра самосопряженного оператора при компактных возмущениях.
15. Полинормированные, счетно-нормированные пространства и пространства Фреше. Пространства $\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{E}(\Omega), \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и топология в них.
16. Теорема о метризуемости счетно нормированного пространства.
17. Теорема об оценке линейного нерерывного функционала в пространстве Фреше.
18. Пространства $\mathcal{E}(\Omega)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ являются просрантсвами Фреше (определить топологию и доказать полноту).
19. Топология в $\mathcal{D}(\Omega)$. Критерий сходимости в $\mathcal{D}(\Omega)$. Операции в пространстве обощенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$.
20. Нетривиальность пространства $\mathcal{D}(\Omega)$. Неметризуемость этого протсранства.
21. Регулярные функции в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Инъективность вложения $L_{1,loc} \to \mathcal{D}'(\Omega)$. (доказательство для случая $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$). Примеры сингулярных обощенных функций.

22. Носитель обобщенной функции. Компактность носителя для функций из $\mathcal{E}'(\Omega)$. Обратно, любая обобщенная функция с компактным носителем является функкией из $\mathcal{E}'(\Omega)$.

23. Существование первообразной от обобщенной функции.

24. Теорема о представлении обобщенной функций с компактным носителем (доказательство для случая $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$).

25. Преобразование Фурье осуществляет топологический изоморфизм пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ в себя. Теорема Планшереля. Преобразование Фурье функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

26. Свертка регулярных функций и ее свойства.

27. Прямые произведения и свертки обобщенных функций. Фундаментальные решения.

28. Теорема вложения Соболева.

29. Теорема о функциональном исчислении непрерывных функций от самосопряженных операторов. (без детального доказательства).

30. Теорема о сильном пределе монотонной последовательности операторов.

31. Существование квадратного корня из положительного оператора. Неотрицательность произведения неотрицательных коммутирующих операторов.

32. Существование спектральных проекторов E_μ. Их монотонность по μ. Спектральная теорема в интегральной форме (без доказательства).