

Экзаменационные вопросы по курсу функционального анализа  
(2015-2016 учебный год, второй семестр третьего курса, первый поток)

1. Свертка в пространстве  $S'$ ; преобразование Фурье и дифференцирование свертки.
2. Фундаментальная функция дифференциального оператора и ее применение.
3. Фундаментальное решение задачи Коши и его применение.
4. Преобразование Фурье функций из  $L_2(\mathbb{R})$ .
5. Связь между ядром линейного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве и образом его сопряженного.
6. Замкнутость образа оператора, являющегося суммой единичного и компактного.
7. Классификация точек спектра линейного непрерывного оператора.
8. Критерий Вейля того, что комплексное число принадлежит спектру нормального оператора.
3. Первая теорема Фредгольма.
4. Альтернатива Фредгольма.
5. Третья теорема Фредгольма.
6. Теорема Рисса-Фишера о спектре компактного оператора.
7. Непустота спектра линейного непрерывного оператора. Доказательство того, что нормальный оператор не имеет остаточного спектра.
8. Доказательство равенства  $\|A\| = \sup\{|(Ax, x)| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \text{spec}A\}$ .
9. Теорема Гильберта-Шмидта.
10. Доказательство того, что компактные операторы образуют замкнутый двусторонний идеал в алгебре линейных непрерывных операторов.
11. Доказательство того, что спектр линейного непрерывного оператора компактен.
12. Спектр самосопряженного оператора.
13. Секвенциальная компактность в слабой топологии замкнутого единичного шара гильбертова пространства.
14. Дифференцирование отображений топологических линейных пространств.
15. Теорема о конечном приращении для функций вещественного аргумента, принимающих значения в локально выпуклом пространстве.
16. Связь между образом линейного непрерывного оператора и ядром его сопряженного.
17. Теорема Шмидта.
18. Теорема о спектре многочлена от самосопряженного оператора.
19. Теорема об изоморфизме самосопряженного оператора с циклическим вектором и оператора умножения на аргумент в пространстве функций на его спектре, квадратично

интегрируемых по некоторой мере.

20. Теорема об изоморфизме самосопряженного оператора прямой сумме операторов умножения на аргумент.

21. Теорема о том, что самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве изоморфен оператору умножения на ограниченную вещественную функцию в пространстве  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \nu)$ .

22. Спектральная теорема фон Неймана.

23. Спектральная теорема, основанная на использовании проекторзначной меры.

24. Неограниченные линейные операторы. Доказательство того, что существование замыкания линейного оператора равносильно плотности области определения его сопряженного.

25. Доказательство того, что если оператор обладает замыканием, то оно совпадает с его вторым сопряженным.

26. Аксиомы квантовой механики.

27. Связь между пространствами компактных операторов, ядерных операторов и всех линейных непрерывных операторов в гильбертовом пространстве (без доказательства).

28. Связь пространств операторов в гильбертовом пространстве (ядерных, компактных и операторов Гильберта-Шмидта) и пополнений тензорного произведения гильбертовых пространств по максимальной, минимальной и гильбертовой кросс-нормам (без доказательства).

29. Принцип сжимающих отображений.

30. Теорема Шаудера-Тихонова (без доказательства).

31. Доказательство того, что сопряженный к компактному линейному оператору компактен.