Программа курса «Функциональный анализ»
Мех-мат, 3 курс, математико-экономический поток, осень 2015/16 уч.г.

1. Метрические и нормированные пространства, примеры. Полнота. Лемма о пополнении подпространства в полном метрическом пространстве.
2. Принцип вложенных шаров. Теорема Бэра. Принцип сжимающих отображений.
3. Теорема о пополнении метрического пространства.
4. Теорема Линделефа о выделении счетного подпокрытия. (Пред)компактность и вполне ограниченность в метрических пространствах, элементарные свойства.
5. Равносильные определения предкомпактности в метрических пространствах. Критерий (пред)компактности Хаусдорфа.
6. (Пред)компактность в пространствах ограниченных функций. Теорема Арцела — Асколи о (пред)компактности в пространстве непрерывных функций на компакте.
7. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность шаров в бесконечномерных нормированных пространствах.
8. Линейные ограниченные операторы на нормированном пространстве. Свойства, эквивалентные ограниченности. Пространство линейных ограниченных операторов, достаточное условие его полноты. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха — Штейнгауза). Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства).
9. Продолжение оператора по непрерывности. Теорема Хана — Банаха (вещественный случай, продолжение с подпространства коразмерности 1).
10. Теорема Хана — Банаха (продолжение линейного непрерывного функционала на сепарабельное пространство с сохранением нормы в вещественном случае, вывод комплексного случая из вещественного).
11. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор, его норма. Второе сопряженное пространство, каноническое вложение E в E^{**}. Рефлексивные пространства.
12. Общий вид линейных непрерывных функционалов на пространстве $L_p(X, \mu)$ (доказательство только для l_p).
13. Общий вид линейных непрерывных функционалов на пространстве $C([a, b])$.
14. Слабая и $*$-слабая сходимость на нормированных пространствах. Ограниченность слабо ограниченного множества. $*$-слабая (секвенциальная) компактность шара.
15. Евклидовы и гильбертовы пространства. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму подпространства и ортогонального дополнения.
16. Ортогональные и ортонормированные системы. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя и экстремальное свойство. Полнота ортонормированной системы и эквивалентные ей свойства.
17. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
18. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве. Эрмитово сопряженные операторы, самосопряженные операторы.
19. Спектр оператора, его классификация. Разложения резольвенты в ряды. Компактность спектра.
20. Непустота спектра. Теорема о спектральном радиусе.
21. Ортогональное дополнение к ядру оператора. Нормальные операторы и пустота их остаточного спектра. Критерий Вейля. Свойства спектра самосопряженного оператора.
22. Компактные операторы. Операции над операторами, сохраняющие компактность. Компактность оператора, сопряженного к компактному.
23. Компактность в $L_2(X, \mu)$ интегрального оператора с ядром из $L_2(X^2, \mu \times \mu)$.
24. Теорема о спектре компактного оператора.
25. Теорема Гильберта — Шмидта.

26. Три теоремы Фредгольма (доказательства - для случая гильбертова пространства).

27. Полинормированные пространства. Критерий хаусдорфовости и достаточное условие метризуемости для топологии полинормированного пространства.

28. Линейные ограниченные операторы на полинормированных пространствах. Пространства, сопряженные к полинормированным. Оператор, сопряженный к ограниченному.

29. Пространства основных функций. Примеры. Стандартная сходимость в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и ее связь с системой допустимых полунорм.

30. Эквивалентные определения непрерывности линейного отображения на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Непрерывность операторов дифференцирования в пространствах основных функций.

31. Пространства обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Достаточность запаса основных функций (инъективность отображения $L_{1,loc}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

32. Дифференцирование в пространствах обобщенных функций. Существование первообразной для элемента $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Лектор, профессор А. Н. Бахвалов

Зав. кафедрой ТФФА, академик Б. С. Кашин