

1. Метрические пространства. Принцип сжимающих отображений.
2. Теорема о замкнутых вложенных шарах. Теорема Бэра.
3. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Сепарабельные пространства. Критерий полноты подпространства метрического пространства.
4. Нормированные и банаховы пространства. Теорема о пополнении метрического пространства.
5. Гильбертовы пространства. Тождество параллелограмма. Неравенство Коши-Буняковского. Теорема об ортогональном дополнении.
6. Ортонормированные системы. Неравенство Бесселя. Теорема Рисса-Фишера.
7. Полные, замкнутые системы. Условия, эквивалентные тому, что ортонормированная система образует базис в гильбертовом пространстве.
8. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
9. Компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах. Критерий Хаусдорфа.
10. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
11. Критерий предкомпактности множества в пространствах ℓ_p ($1 \leq p < \infty$).
12. Критерий предкомпактности множества в пространстве $C[a, b]$.
13. Системы множеств (полукольцо, кольцо, алгебра, σ -алгебра). Аддитивные и σ -аддитивные меры.
14. Структура минимального кольца, порождённого полукольцом. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо с сохранением σ -аддитивности.
15. Свойства меры на кольце (монотонность, полуаддитивность, σ -полуаддитивность, непрерывность). Счетная аддитивность меры Лебега-Стилтьеса.
16. Внешняя мера Лебега. Свойства внешней меры на $R(S)$. σ -полуаддитивность внешней меры.
17. Измеримые множества относительно заданной внешней меры. Теорема об измеримых по Лебегу множествах (*без доказательства*).
18. Измеримые функции. Свойства измеримых функций (сумма, произведение, верхний и нижний предел последовательности).
19. Сходимость измеримых функций почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере. Связь между сходимостью почти всюду и по мере.
20. Интеграл Лебега для простых функций и его основные свойства.
21. Определение интеграла Лебега для произвольной измеримой функции и его свойства.
22. Теоремы о счетной аддитивности и абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Неравенство Чебышёва.
23. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
24. Теорема Б. Леви и теорема Фату.
25. Сравнение интегралов Римана и Лебега на отрезке.
26. Несобственный интеграл Римана и интеграл Лебега.
27. Произведение пространств и мер. σ -аддитивность произведения мер. Теорема Фубини (*без доказательства*).
28. Неравенства Гёльдера и Минковского. Нормы в пространствах $L_p(X, \mu)$ и ℓ_p .
29. Полнота пространств $L_1(X, \mu)$.

¹см. на обороте

30. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов. Непрерывные операторы. Эквивалентность ограниченности и непрерывности для линейных операторов.
31. Полнота пространства $\mathcal{B}(X, Y)$, где Y — банахово. Сопряжённое пространство X^* и его полнота.
32. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в c_0 . Полнота пространства ℓ_1 .
33. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в ℓ_p при $1 \leq p < \infty$. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в $L_p(X, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$) (без доказательства). Полнота пространств $L_p(X, \mu)$ и ℓ_p при $1 < p \leq \infty$.
34. Теорема Хана–Банаха: случай вещественного сепарабельного нормированного пространства.
35. Теорема Хана–Банаха для комплексного нормированного пространства. Следствия из теоремы Хана–Банаха. Рефлексивные пространства.
36. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
37. Различные виды сходимости в нормированных пространствах. Сравнение сходимостей.
38. Сходимости в пространстве операторов. Сравнение операторных сходимостей.

Лектор, профессор

И.А. Шейпак

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа, академик РАН, профессор

Б. С. Кашин