Программа курса «Функциональный анализ», 3-й курс, 2-ой поток, 2015

Лектор: проф. А. А. Шкаликов

1. Метрические пространства. Открытые и замкнутые множества. Полнота. Сепарабельность. Примеры полных и неполных, сепарабельных и несепарабельных пространств.
2. Теорема о пополнении метрического X (один из вариантов доказательств).
3. Лемма о вложенных шарах. Теорема Бэра. Принцип равномерной ограниченности непрерывных функий на некотором шаре.
4. Топологические пространства. База. Сепарабельность. Примеры. Компакты и их свойства (компакт замкнут и содержит предельные точки).
5. Непрерывные отображения топологических пространств. Свойства непрерывных отображений компактов. Компактность непрерывного образа компакта. Достижение верхней и нижней граней. Теорема Кантора.
6. Компактность в метрическом пространстве. Вполне ограниченные множества. Критерий полной ограниченности (из любой последовательности можно выделить фундаментальную).
7. Критерий компактности в метрическом пространстве (полная ограниченность и полнота).
8. Эквивалентность компактности и счетной компактности в сепарабельных пространствах (из всякого открытого покрытия можно выделить счетное подпокрытие).
9. Критерий предкомпактности в l_p, $p \geqslant 1$.
10. Теорема Асколи-Арцела: критерий предкомпактности в $C[0,\,1]$.
11. Теорема М.Рисса: критерий предкомпактности в $L_p[0,\,1]$, $p \geqslant 1$ (доказательство для $p = 1$).
12. Линейные нормированные и банаховы пространства. Линейные ограниченные операторы (ограниченность эквивалентна непрерывности). Норма оператора. Полнота пространства линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(X, Y)$ при условии полноты Y.
13. Теорема Банаха–Штейнгауза.
14. Теорема Банаха об обратном операторе.
15. Теорема Хана–Банаха для вещественных линейных пространств.
16. Теорема Хана–Банаха для вещественных сепарабельных и для комплексных линейных пространств.

17. Сопряженное к линейному нормированному пространству, его полнота. Равенство $\dim L = \dim L^*$. Изометрическое вложение линейного нормированного пространства во второе сопряженное. Рефлексивные пространства. Примеры рефлексивных и нерефлексивных пространств.
18. Теорема Рисса о пространстве, сопряженном к $C[a, b]$ (без доказательства равенства $\|f\| = \|\mu\|_{BV}$).
19. Базисы в банаховом пространстве. Описание пространств c_0^* и l_p^* при $p \geqslant 1$.
20. Предгильбертовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Функционал $\sqrt{(x, x)}$ обладает свойством нормы. Лемма Рисса о существовании и единственности элемента, на котором достигается расстояние до подпространства.
21. Теорема об ортогональном разложении в гильбертовом пространстве.
22. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве, процесс ортогонализации. Теорема Пифагора, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
23. Эквивалентность свойств полноты, замкнутости и выполнения равенства Парсеваля для ортонормированных систем.
24. Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Изоморфизм гильбертовых пространств H и H^*. Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Равенство $A = A^{**}$.
25. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность единичной сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве. Ограниченность слабо ограниченных множеств в ЛНП.
26. Сопряженный к линейному оператору в банаховом пространстве. Сильная и слабая сходимость. Теорема Банаха-Алаоглу (без доказательства). Секвенциальная $*$- слабая компактность замкнутого единичного шара в сепарабельном X. Секвенциальная слабая компактность единичного шара в гильбертовом пространстве.
27. Компактные операторы. Примеры и свойства компактных операторов. Теорема о равномерном пределе компактных операторов. Доказать, что компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.
28. Приближение компактного оператора конечномерными в гильбертовом пространстве. Сопряженный к компактному компактен (доказательство для гильбертова пространства).
29. Спектр и резольвента, их замкнутость и открытость. Равенство $\operatorname{spec}(A^*) = \overline{\operatorname{spec}(A)}$. Равенство $H = \operatorname{Ker} A^* \oplus \overline{\operatorname{Im}(A)}$.
30. Непустота спектра. Оценка $r(A) \leqslant \|A\|$.