Экзаменационные вопросы (функциональный анализ, первый поток третьего курса математиков, осенний семестр 2015 года)

1. Равносильность счетной компактности и секвенциальной компактности для подмножеств метрических пространств.
2. Доказательство того, что всякое секвенциально компактное подмножество метрического пространства полно и предкомпактно.
3. Доказательство того, что всякое компактное подмножество метрического пространства секвенциально компактно.
4. Доказательство того, что всякое полное предкомпактное подмножество метрического пространства компактно.
5. Теорема о вложенных шарах.
6. Теорема Бэра.
7. Теорема о пополнении метрического пространства.
8. Доказательство того, что непрерывный образ компактного множества является компактным множеством.
9. Доказательство того, что непрерывное отображение компактного метрического пространства в метрическое пространство равномерно непрерывно.
10. Теорема Банаха–Штейнхауза.
11. Теорема Хана–Банаха для линейных функционалов на линейных пространствах.
12. Теорема Хана–Банаха для линейных функционалов на линейных нормированных пространствах (над полем вещественных чисел).
13. Сохранение нормы при каноническом вложении нормированного линейного пространства в его второе сопряженное.
14. Теорема о пополнении нормированного линейного пространства.
15. Полнота нормированного линейного пространства линейных непрерывных отображений нормированного линейного пространства в банахово пространство.
16. Теорема Банаха о гомоморфизме.
17. Теорема Банаха о замкнутом графике.
18. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве.
19. Лемма о трех гомоморфизмах.
20. Всякий линейный функционал, непрерывный в слабой топологии, является элементом пространства, задающего слабую топологию.
21. Ограниченность слабо сходящейся последовательности в нормированном пространстве.
22. Для выпуклых множеств в нормированном пространстве замкнутость в слабой топологии и в топологии, определяемой нормой, равносильны.
23. Для подмножеств нормированного линейного пространства ограниченность по норме и слабая ограниченность равносильны.
24. Неравенство Бесселя.
25. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном предгильбертовом пространстве.
26. Существование ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве.
27. Если A — линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве, то $\|A\| = \|A^*\|$.
28. Для ортонормированной системы векторов в предгильбертовом пространстве тотальность, замкнутость и свойство быть базисом равносильны и каждое из этих свойств влечет полноту ортонормированной системы.
29. Теорема о существовании ортогональной проекции.
30. Теорема Рисса–Фишера.
31. Критерий метризуемости локально выпуклого пространства.
32. Преобразование Фурье функций из пространства $\mathcal{S}$. Связь дифференцирования и преобразования Фурье.
33. Пространства $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$. Плотность образов при вложениях $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.
34. Вложение локально интегрируемых функций и локально конечных мер в пространство $\mathcal{D}'$ обобщенных функций.
35. Формула обращения для преобразования Фурье в пространстве $\mathcal{S}$.
36. Преобразование Фурье обобщенных функций из пространства $\mathcal{S}'$. Связь дифференцирования и преобразования Фурье.