Программа курса
«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

(*3 курс, отд. механики*)

1. Линейные пространства сходимости $(\boldsymbol{E}, \zeta)$. Доказательство регулярности сходимости в метрических линейных пространствах и выполнение аксиомы полноты в полных метрических линейных пространствах. Пример нерегулярной сходимости в пространстве $\boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$.

2. Сопряженное пространство $(\boldsymbol{E}', \zeta')$ к линейному пространству сходимости $(\boldsymbol{E}, \zeta)$. Теорема о полноте сопряженного пространства сходимости $(\boldsymbol{E}', \zeta')$.

3. Полинормированные пространства $(\boldsymbol{E}, \mathcal{P})$. Доказательство метризуемости сходимости в счетно-нормированных пространствах. Равносильность непрерывности и ограниченности для линейных отображений, заданных в счетно-нормированном пространстве.

4. Пространство $\mathcal{D}(X)$ основных функций, где $X \subset \mathbb{R}^m$ открытое множество. Доказательство полноты пространства $\mathcal{D}'(X)$ обобщенных функций. Действия с обобщенными функциями.

5. Локальная структура обобщенных функций из пространства $\mathcal{D}'(X)$. Существование первообразной в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(a, b)$.

6. Носитель обобщенной функции. Структура обобщенных функций с носителем в точке (без доказательства). Характеристика образа вложения $\mathcal{E}'(X) \subset \mathcal{D}'(X)$ как пространства всех обобщенных функций с компактным носителем.

7. Свойства усреднения функций по Со́болеву. Вложение $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X) \subset \mathcal{D}'(X)$ пространства локально интегрируемых функций в пространство обобщенных функций.

8. Обобщенные производные в смысле Со́болева. Определение пространства Со́болева $W_p^k(X)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Доказательство полноты пространства Со́болева.

9. Определение пространства Шва́рца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Вложение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ сопряженного пространства в пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Действия с обобщенными функциями из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

10. Преобразование Фурье́ функции $\mathrm{e}^{-\|x\|^2/2}$. Доказательство непрерывности и биективности преобразования Фурье́ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Преобразование Фурье́ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

11. Преобразование Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$. Лемма Ри́мана–Лебе́га. Условие Ди́ни в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$. Формулы умножения, обращения, дифференцирования и свертки.

12. Преобразование Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Теорема Планшере́ля. Формулы умножения, обращения и свертки для преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

13. Ортогональность и полнота системы функций Эрми́та в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Доказательство того, что функции Эрми́та являются собственными функциями оператора Фурье́.

14. Необходимые и достаточные условия существования биортогональной системы. Ядро $\ker A$ и образ $\operatorname{Im} A$ линейного оператора $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$. Необходимые и достаточные условия биективности линейного оператора. Доказательство линейности обратного оператора.

15. Сопряженный оператор $A^* : \boldsymbol{F}^* \to \boldsymbol{E}^*$ к ограниченному оператору $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$. Равенство норм $\|A^*\| = \|A\|$. Аннуляторы множеств в пространстве $\boldsymbol{E}$ и в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}^*$. Соотношения между ядром и образом оператора и его сопряженного.

16. Доказательство полноты произведения банаховых пространств $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Условие замкнутости графика линейного оператора $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$. Теорема Ба́наха о замкнутом графике.

17. Критерий замкнутости ограниченного оператора. Существование, замкнутость и условие ограниченности эрмитово-сопряженного оператора. Теорема Хе́ллингера–Те́плица.

18. Теорема Ба́наха об обратном операторе. Доказательство полноты факторпространства банахова пространства по замкнутому подпространству. Теорема о гомоморфизме.

19. Теорема о тройке. Доказательство равенств $\operatorname{Im} A = (\ker A^*)_\perp$ и $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp$ для ограниченных операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ в банаховых пространствах с замкнутым образом $\operatorname{Im} A$.

20. Определение проектора в линейном пространстве и его свойства. Теорема о дополняемых подпространствах в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$. Доказательство дополняемости замкнутых подпространств $L \subset \boldsymbol{E}$ в случаях $\dim L < \infty$ и $\operatorname{codim} L < \infty$.

21. Теорема о резольвенте ограниченного оператора в банаховом пространстве. Свойства спектра и резольвенты. Спектр и резольвента сопряженного оператора.

22. Свойства точечного, непрерывного, остаточного, предельного и дефектного спектра для ограниченного оператора в банаховом пространстве. Теорема о границе спектра.

23. Спектр оператора Фурье́ и вычисление спектра оператора свертки в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Теорема о спектральном радиусе ограниченного оператора.

24. Свойства компактных операторов в банаховых пространствах. Теорема Ша́удера о равносильности компактности ограниченного оператора и его сопряженного.

25. Свойства спектра компактного оператора. Спектральная теорема Ри́сса–Ша́удера для компактного оператора в банаховом пространстве. Достаточные условия компактности интегрального оператора в пространстве $\boldsymbol{L}_p[0,1]$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

26. Фредго́льмовы операторы. Лемма о замкнутости образа. Теорема о классическом операторе Фредго́льма $B = I - A$, где A — компактный оператор в банаховом пространстве.

27. Первая, вторая, третья (альтернатива Фредго́льма) и четвертая теоремы Фредго́льма о разрешимости уравнений в банаховом пространстве.

28. Свойства спектра эрмитова оператора в гильбертовом пространстве. Теорема Ги́льберта–Шми́дта о компактном эрмитовом операторе.

29. Задача Шту́рма–Лиуви́лля. Доказательство существования полной ортонормированной системы собственных функций дифференциального оператора второго порядка.

Дополнительная литература

1. Богачев В. И., Смолянов О. Г. «Действительный и функциональный анализ»
2. Владимиров В. С. «Обобщенные функции в математической физике»
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. «Элементы теории функций и функционального анализа»
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа»
5. Рид М., Саймон Б. «Методы современной математической физики» т.1
6. Федоров В. М. «Курс функционального анализа»
7. Хелемский А. Я. «Лекции по функциональному анализу»

Весна 2015 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*