

## Билеты по курсу „Функциональный анализ” 6 семестр

Лектор: профессор В. И. Богачев

1. Понятие о локально выпуклом пространстве. Примеры. Пространства  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{S}$  и сходимости в них.
2. Обобщенные функции классов  $\mathcal{D}'$  и  $\mathcal{S}'$ . Производная обобщенной функции. Равенство  $(\ln|x|)' = \text{V.P.} \frac{1}{x}$ .
3. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его основные свойства (непрерывность, ограниченность, производная преобразования Фурье, преобразование Фурье производной).
4. Формула обращения для преобразования Фурье (для точек непрерывности ограниченной интегрируемой функции с интегрируемым преобразованием Фурье). Формула обращения в точках дифференцируемости (без доказательства).
5. Преобразование Фурье в  $\mathcal{S}$  и его непрерывность.
6. Равенство Парсеваля для интегралов Фурье. Инъективность преобразования Фурье. Полнота системы функций Эрмита.
7. Преобразование Фурье в  $\mathcal{S}'$ . Преобразование Фурье дельта-функции.
8. Преобразование Фурье в  $L^2(\mathbf{R}^1)$  и теорема Планшереля.
9. Свертка интегрируемых функций. Свертка обычной и обобщенной функций. Использование преобразования Фурье и свертки для решения дифференциальных уравнений.
10. Пространства С.Л. Соболева  $W^{p,k}$  и их характеристика через пополнение по соболевской норме.
11. Описание  $W^{2,k}$  через преобразование Фурье. Теоремы вложения в  $L^q$  и  $C$  (без доказательства).
12. Спектр оператора. Сохранение обратимости при малых возмущениях. Замкнутость спектра, включение его в круг радиуса, равного норме оператора, и непустота.
13. Спектр диагонального оператора. Норма и спектр оператора умножения на функцию.
14. Строение спектра компактного оператора в бесконечномерном пространстве.
15. Альтернатива Фредгольма ( $\text{Ker}(I - K) = 0 \iff (I - K)X = X$ ).
16. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма. Критерий Вейля и вещественность спектра самосопряженного оператора.
17. Равенства

$$\|A\| = \sup\{|(Ax, x)|, \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda|: \lambda - \text{точка спектра } A\}$$

для самосопряженного оператора  $A$ .

18. Теорема Гильберта – Шмидта о компактных самосопряженных операторах.
19. Унитарные операторы и унитарная эквивалентность операторов. Спектр и собственные функции оператора преобразования Фурье.
20. Теорема об отображении спектров для многочленов. Непрерывные функции от самосопряженных операторов и равенство  $\|f(A)\| = \sup_{t \in \sigma(A)} |f(t)|$ .
21. Циклические векторы. Эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию (доказательство для оператора с циклическим вектором).
22. Проекторы и проекторнозначные меры. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере. Явное вычисление спектральной меры для оператора умножения на аргумент и для проектора.

Лектор профессор

В. И. Богачев

Заведующий кафедрой теории функций  
и функционального анализа, академик РАН

Б. С. Кашин