ПРОГРАММА КУРСА

«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» (*3 курс, отделение механики*)

1. Метрические и нормированные пространства. Доказательство полноты пространства $\boldsymbol{B}(X)$. Теорема о пополнении метрического пространства.

2. Открытые, замкнутые, всюду плотные и нигде не плотные множества в метрическом пространстве. Принцип сжимающих отображений. Теорема Бэ́ра о категории.

3. Топологические и метрические линейные пространства. Эквивалентные определения непрерывности (линейных) отображений метрических (линейных) пространств.

4. Ограниченные множества в метрическом линейном пространстве. Принцип равностепенной непрерывности линейных отображений метрических линейных пространств.

5. Вполне ограниченные множества. Эквивалентные определения компактности множества в метрическом пространстве. Критерий компактности Хаусдо́рфа.

6. Свойства непрерывных отображений, заданных на компактном множестве. Теорема А́лекса́ндрова. Принцип продолжения по непрерывности равномерно непрерывных отображений.

7. Критерий предкомпактности множества в пространстве $\boldsymbol{C}(K)$ (теорема А́ско́ли–Арцела́). Критерий предкомпактности множества в пространстве $\boldsymbol{B}(X)$ (теорема Фере́са, без доказательства).

8. Изоморфизм конечномерных нормированных пространств. Эквивалентность норм. Существование и единственность наилучшего приближения в нормированном пространстве.

9. Лемма о почти перпендикуляре. Необходимое и достаточное условие компактности единичного шара в нормированном пространстве.

10. Определение кольца, алгебры, σ-кольца и σ-алгебры, а также σ-алгебры боре́левских множеств. Представление элементов минимального кольца, порожденного полукольцом множеств.

11. Существование и единственность продолжения меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства σ-аддитивных мер, в том числе свойства непрерывности сверху и снизу.

12. Понятие внешней меры множества. Свойства измеримых множеств. Теорема Каратеодо́ри.

13. Внешняя мера Лебе́га и ее свойства. Теорема о существовании и единственности продолжения σ-аддитивной и σ-конечной меры.

14. Лемма об измеримой оболочке. Эквивалентность определения измеримости по Лебе́гу для множеств конечной меры. Критерий измеримости Валле́-Пуссе́на.

15. Доказательство σ-аддитивности регулярных мер. Мера Сти́лтьеса и мера Лебе́га–Сти́лтьеса в $\mathbb{R}$. Существования неизмеримого множества по Лебегу на отрезке $[0,1]$.

16. Измеримые функции и их свойства. C-свойство Лу́зина. Существование последовательности простых измеримых функций, монотонно сходящихся к неотрицательной измеримой функции.

17. Теорема Его́рова. Взаимосвязь различных типов сходимости последовательности измеримых функций на множестве конечной меры (почти всюду, по мере и почти равномерно). Пример Ри́сса.

18. Интеграл Лебе́га и его свойства. Теорема о монотонной сходимости интеграла Лебе́га.

19. Лемма Фату́. Теорема Лебе́га о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенство Чебышёва. Свойства функции распределения измеримой неотрицательной функции.

20. Счетная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радо́на–Никоди́ма (без доказательства). Критерий абсолютной непрерывности заряда.

21. Пространство $\boldsymbol{BV}[a,b]$ функций ограниченной вариации на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Теорема Лебе́га о существовании производной монотонной функции (без доказательства). Разложение Жорда́на. Сравнение интеграла Лебе́га–Сти́лтьеса с интегралом Ри́мана–Сти́лтьеса.

22. Пространство $\boldsymbol{AC}[a,b]$ абсолютно непрерывных функций на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Характеристическое свойство абсолютно непрерывной функции.

23. Прямое произведение мер. Доказательство σ-аддитивности прямого произведения σ-аддитивных мер.

24. Вычисление меры измеримого множества при помощи сечений. Теорема Фуби́ни.

25. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Сравнение интегралов Ри́мана и Лебе́га на n-мерном отрезке в $\mathbb{R}^n$.

26. Неравенства Гёльдера и Минко́вского. Обобщенное неравенство Минко́вского.

27. Пространства $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Теорема о полноте этих пространств.

28. Теорема о всюду плотности множества $\boldsymbol{C}(X)$ непрерывных функций в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$. Примеры всюду плотных множеств в пространстве $\boldsymbol{L}_p[0,1]$.

29. Теорема о полноте пространства $\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченных операторов. Теорема Ба́наха–Штейнга́уза. Норма оператора умножения на функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

30. Лемма Цорна. Теорема Ха́на–Ба́наха о продолжении линейного функционала и ее следствие для нормированных пространств.

31. Теорема Ри́сса о представлении ограниченных функционалов на пространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$. Сопряженное пространство $\boldsymbol{C}^*[a,b]$. Сопряженное пространство $\boldsymbol{L}_p^*(X,\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$ (без доказательства).

32. Равномерная и сильной сходимость последовательности ограниченных операторов в пространстве $\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. Свойства и критерий сильной сходимости в $\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

33. Изометрическое вложение нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ во второе сопряженное $\boldsymbol{E}^{**}$. Свойства и критерий слабой* сходимости функционалов в $\boldsymbol{E}^*$ и слабой сходимости элементов в $\boldsymbol{E}$.

34. Теорема о метризуемости и слабой* компактности единичного шара $S^* \subset \boldsymbol{E}^*$ сопряженного пространства $\boldsymbol{E}^*$ к сепарабельному нормированному пространству $\boldsymbol{E}$.

35. Гильбертовы пространства. Неравенства Коши́–Буняко́вского, неравенство треугольника и Беппо́ Ле́ви. Характеристическое свойство евклидовых пространств (без доказательства достаточности).

36. Существование и единственность наилучшего приближения в гильбертовом пространстве. Формула для величины наилучшего приближения конечномерным подпространством.

37. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства и ее следствие. Теорема Ри́сса о представлении ограниченных функционалов в гильбертовом пространстве.

38. Полные ортонормированные системы элементов. Неравенство Бе́сселя. Равенство Парсева́ля. Теорема Стекло́ва о полноте. Полнота тригонометрической системы в пространстве $\boldsymbol{L}_2[0,1]$.

39. Метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта. Теорема Ри́сса–Фи́шера об изометрическом изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

Дополнительная литература.

1. Богачев В. И. «Функциональный анализ».
2. Данфорд Н., Шварц Дж. «Линейные операторы».
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. «Функциональный анализ».
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В «Элементы теории функций и функционального анализа».
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа».
6. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».
7. Хелемский А. Я. «Лекции по функциональному анализу».

Осень 2014 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*