П р о г р а м м а   к у р с а

«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» (*3 курс, вечернее отделение*)

1. Линейные пространства сходимости (E,ζ). Аксиома полноты. Доказательство выполнения аксиомы полноты в полных метрических линейных пространствах.

2. Сопряженное пространство (E',ζ') к линейному пространству сходимости (E,ζ). Теорема о полноте сопряженного пространства.

3. Локально выпуклые пространства $(E,\mathscr{P})$. Доказательство метризуемости сходимости в счетно-нормированном пространстве. Равносильность непрерывности и ограниченности линейного функционала в счетно-нормированном пространстве.

4. Пространство $\mathscr{D}(X)$ основных функций. Доказательство полноты пространства $\mathscr{D}'(X)$ обобщенных функций. Действия с обобщенными функциями.

5. Локальная структура обобщенных функций в пространстве $\mathscr{D}'(X)$. Структура обобщенных функций с носителем в точке.

6. Носитель обобщенной функции. Сопряженное пространство $\mathscr{E}'(X)$. Характеристика образа вложения $\mathscr{E}'(X)\subset\mathscr{D}'(X)$ в пространство обобщенных функций.

7. Регулярные обобщенные функции. Взаимная однозначность вложения пространства $L_{\ell oc}(X)$ локально интегрируемых функций в пространство $\mathscr{D}'(X)$.

8. Обобщенная производная в смысле Соболева. Пространство Соболева $W_p^k(X)$, где $1\leqslant p\leqslant\infty$. Доказательство полноты пространства Соболева.

9. Пространство Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Вложение сопряженного пространства $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Действия с обобщенными функциями из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

10. Преобразование Фурье функции $\mathrm{e}^{-\|x\|^2/2}$. Доказательство биективности преобразования Фурье в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Преобразование Фурье в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и его свойства.

11. Биортогональные системы в нормированном пространстве. Ядро $\ker(A)$ и образ $\operatorname{Im}(A)$ линейного оператора $A:E\to F$. Необходимые и достаточные условия биективности линейного оператора. Доказательство линейности обратного оператора.

12. Принцип равномерной ограниченности в $\mathscr{L}(E,F)$ (теорема Банаха–Штейнгауза). Критерий сильной сходимости операторов в пространстве $\mathscr{L}(E,F)$ и его следствия.

13. Сопряженный оператор $A^*:F^*\to E^*$ для ограниченного оператора $A:E\to F$. Равенство норм $\|A^*\|=\|A\|$. Аннуляторы множеств в пространствах E и E^*. Соотношения между ядром и образом оператора и его сопряженного.

14. Произведение банаховых пространств и доказательство его полноты. Критерий замкнутости ограниченного оператора. Теорема Банаха о замкнутом графике.

15. Эрмитово-сопряженный оператор A'. Критерий существования и замкнутость оператора A'. Равенство норм $\|A\|=\|A'\|$. Теорема Хеллингера–Теплица.

16. Теорема Банаха об обратном операторе. Факторпространство банахова пространства и доказательство его полноты. Теорема о гомоморфизме.

17. Теорема о тройке. Доказательство равенств $\operatorname{Im}(A)=\ker(A^*)_\perp$ и $\operatorname{Im}(A^*)=\ker(A)^\perp$ для операторов $A:E\to F$ в банаховых пространствах с замкнутым образом $\operatorname{Im}(A)$.

18. Определение проектора в линейном пространстве и его свойства. Теорема о дополняемых подпространствах в банаховом пространстве. Доказательство дополняемости замкнутых подпространств $L\subset E$ в случае $\dim(L)<\infty$ или $\operatorname{codim}(L)<\infty$.

19. Теорема о голоморфности резольвенты и оценка ее нормы. Свойства спектра и резольвенты ограниченного оператора. Спектр сопряженного оператора.

20. Свойства точечного, непрерывного, остаточного, предельного и дефектного спектра ограниченного оператора в банаховом пространстве. Теорема о границе спектра.

21. Вычисление спектра оператора Фурье. Теорема о спектральном радиусе ограниченного оператора. Спектральный радиус оператора интегрирования.

22. Свойства компактных операторов в банаховых пространствах. Теорема Шаудера о равносильности компактности оператора и его сопряженного.

23. Свойства спектра компактного оператора. Спектральная теорема Рисса–Шаудера для компактного оператора в банаховом пространстве. Компактность интегрального оператора в $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, с непрерывным ядром.

24. Теорема об образе классического оператора Фредгольма $T = I - A$, где A — компактный оператор в банаховом пространстве. Первая и вторая теоремы Фредгольма о разрешимости уравнений в банаховом пространстве.

25. Доказательство третьей теоремы (альтернативы Фредгольма) и четвертой теоремы Фредгольма о разрешимости уравнений в банаховом пространстве.

26. Эрмитово-сопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства точечного, непрерывного, остаточного и предельного спектра. Формулировка теорем Фредгольма в гильбертовом пространстве. Теорема Вейля о компактном возмущении.

27. Теорема о спектральном радиусе эрмитова оператора. Свойства спектра эрмитова оператора. Спектральная теорема Гильберта–Шмидта для компактного эрмитова оператора в гильбертовом пространстве.

Дополнительная литература.

1. Владимиров В. С. «Обобщенные функции в математической физике».
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. «Элементы теории функций и функционального анализа».
3. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа».
4. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».

Весна 2014 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*