Программа курса «Функциональный анализ»
Мех-мат, 3 курс, механики, весна 2013/14 уч.г.

1. Линейные ограниченные операторы на нормированном пространстве. Свойства, эквивалентные ограниченности. Пространство линейных ограниченных операторов, достаточное условие его полноты. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха — Штейнгауза). Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства).

2. Продолжение оператора по непрерывности. Теорема Хана — Банаха (вещественный случай, продолжение с подпространства коразмерности 1).

3. Теорема Хана — Банаха (завершение доказательства вещественного случая, комплексный случай). Продолжение линейного непрерывного функционала с сохранением нормы.

4. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор, его норма. Второе сопряженное пространство, каноническое вложение E в E^{**}. Рефлексивные пространства.

5. Общий вид линейных непрерывных функционалов на пространстве $L_p(X, \mu)$ (доказательство только для l_p).

6. Общий вид линейных непрерывных функционалов на пространстве $C([a, b])$.

7. Слабая и $*$-слабая сходимость на нормированных пространствах. Ограниченность слабо ограниченного множества. $*$-слабая (секвенциальная) компактность шара.

8. Евклидовы и гильбертовы пространства. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму подпространства и ортогонального дополнения.

9. Ортогональные и ортонормированные системы. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Полнота ортогональной системы и эквивалентные ей свойства.

10. Существование ортонормированного базиса в гильбертовом и в сепарабельном евклидовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

11. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве. Эрмитово сопряженные операторы, самосопряженные операторы. Ортогональные проекторы.

12. Спектр оператора, его классификация. Компактность спектра.

13. Непустота спектра. Теорема о спектральном радиусе.

14. Нормальные операторы и пустота их остаточного спектра. Критерий Вейля. Свойства спектра самосопряженного оператора.

15. Компактные операторы. Операции над операторами, сохраняющие компактность.

16. Достаточное условие компактности в $C(K)$ (обобщение теоремы Арцела). Компактность оператора, сопряженного к компактному.

17. Компактность в $L_2(X, \mu)$ интегрального оператора с ядром из $L_2(X^2, \mu \times \mu)$.

18. Теорема о спектре компактного оператора.

19. Теорема Гильберта — Шмидта.

20. Три теоремы Фредгольма (доказательства - для случая гильбертова пространства).

21. Полинормированные пространства. Линейные ограниченные операторы на них. Пространства, сопряженные к полинормированным. Оператор, сопряженный к ограниченному.

22. Критерий хаусдорфовости и достаточное условие метризуемости для топологии полинормированного пространства.

23. Пространства основных функций. Примеры. Стандартная сходимость в $\mathcal{D}$ и ее связь с системой допустимых полунорм.

24. Эквивалентные определения непрерывности линейного отображения на $\mathcal{D}$. Непрерывность операторов дифференцирования в пространствах основных функций.

25. Пространства обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Достаточность запаса основных функций (инъективность отображения $L_{1,loc} \to \mathcal{D}'$).

26. Дифференцирование в пространствах обобщенных функций. Существование первообразной для элемента $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

27. Преобразование Фурье на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Преобразование Фурье на пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Согласованность определений преобразования Фурье для регулярных обобщенных функций.

28. Лемма о плотности $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $L_p(\mathbb{R})$. Теорема Планшереля о преобразовании Фурье на $L_2(\mathbb{R})$.

29. Система функций Эрмита и ее свойства. Спектр оператора преобразования Фурье на $L_2(\mathbb{R})$.

Лектор, д.ф.-м.н., доцент А. Н. Бахвалов

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН Б. С. Кашин