

1. Вспомогательные утверждения: о существовании нетривиального ограниченного функционала, аннулирующего собственное замкнутое подпространство банахова пространства. Теореме о дополняемости конечномерного замкнутого подпространства банахова пространства.
2. Конечномерность ядра и замкнутость образа оператора  $I - A$ , где  $A \in \mathcal{K}(X)$ .
3. Соотношения двойственности для ядра и образа операторов  $I - A$  и  $I - A'$ ,  $A \in \mathcal{K}(X)$ . Первая теорема Фредгольма.
4.  $\text{Ker}(I - A) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(I - A) = X$ . Альтернатива Фредгольма.
5. Третья теорема Фредгольма
6. Спектр компактного оператора.
7. Полиноммированные пространства. Пространства основных функций  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{S}$ . Сходимости и полунормы в них. Плотность  $\mathcal{D}$  в  $L_2(\mathbb{R})$ .
8. Непрерывные операторы в полиноммированных пространствах. Непрерывность оператора дифференцирования и умножения на независимую переменную в  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{S}$ .
9. Пространства обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Порядок сингулярности. Достаточность запаса основных функций (на примере пространства  $\mathcal{D}$ ).
10. Действия над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных.
11. Решение уравнения  $y' = 0$  в  $\mathcal{D}'$ . Существование первообразной обобщенной функции.
12. Описание действия обобщенной функции на пространстве  $\mathcal{D}(a, b)$ .
13. Структура  $\mathcal{D}'$ .
14. Носитель обобщенной функции. Структура обобщенной функции с носителем в одной точке.
15. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его свойства. Связь гладкости функции со скоростью убывания преобразования Фурье, связь степенной скорости убывания функции с гладкостью преобразования Фурье.
16. Преобразование Фурье в  $\mathcal{S}$  и его непрерывность. Формула обращения.
17. Преобразование Фурье в  $\mathcal{S}'$ . Инъективность оператора Фурье в  $L_1(\mathbb{R})$ .
18. Интегральное равенство Парсеваля. Преобразование Фурье в  $L_2(\mathbb{R})$ , теорема Планшереля.
19. Преобразование Фурье экспоненциально убывающей функции.
20. Полнота системы функций Эрмита.
21. Спектр оператора преобразования Фурье в  $L_2(\mathbb{R})$ .
22. Свертка интегрируемых функций и ее свойства.
23. Свертка обобщенной функции и основной. Свертка обобщенных функций. Оператор свертки в  $L_2(\mathbb{R})$ .
24. Спектральная теорема в терминах функционального исчисления для непрерывных функций.
25. Спектральная теорема в терминах функционального исчисления для ограниченных борелевских функций. Проекторнозначные меры.
26. Интегральное представление функции от самосопряженного оператора. Явное вычисление проекторнозначных мер для самосопряженного оператора в  $\mathbb{C}^n$  и для оператора умножения на непрерывную строго монотонную функцию в  $L_2[a; b]$ .
27. Циклические векторы. Унитарная эквивалентность самосопряженного оператора с циклическим вектором оператору умножения на независимый аргумент.
28. Унитарная эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию. Унитарные инварианты самосопряженного оператора (без доказательства).

Лектор, профессор

И. А. Шейпак

Заведующий кафедрой теории функций и  
функционального анализа, академик РАН, профессор

Б. С. Кашин