ЗАДАЧИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ,

предлагавшиеся на лекциях для I потока математиков, весенний семестр 2014 г..

Лектор А.Я.Хелемский.

1. Спектр гильбертова сопряженного оператора к T есть $\overline{\sigma(T)}$.

2. Если $\lambda \in \sigma_r(T)$, то $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.

3. Если $\lambda \in \sigma_p(T)$, то $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ либо $\overline{\lambda} \in \sigma_r(T^*)$.

4. Найти спектры диагонального оператора, оператора левого и правого сдвига в l_2.

5. Найти спектр оператора сдвига в $l_2(\mathbb{Z})$ и в $L_2(\mathbb{R})$.

6. Найти спектр оператора умножения на существенно ограниченную функцию в $L_2[a, b]$.

7. Найти спектр оператора неопределенного интегрирования в $L_2[0, 1]$.

8. Спектр элемента чистой алгебры может быть любым подмножеством в $\mathbb{C}$, в том числе и пустым.

9. При гомоморфизме спектр может сохраниться, а может и уменьшиться.

10. Спектр элемента банаховой алгебры и даже оператора в гильбертовом пространстве может быть любым компактным непустым подмножеством в $\mathbb{C}$.

11. Классическая сходимость последовательностей в $C^\infty[a, b]$ не может быть задана с помощью одной нормы.

12. Вейерштрассова сходимость последовательностей в $\mathcal{O}(\mathbb{D}^0)$ не может быть задана с помощью одной нормы.

13. Покоординатная сходимость последовательностей в ${}_\infty$ не может быть задана с помощью одной нормы.

14. Описать сходящиеся последовательности в сильнейших полинормированных пространствах.

15. Хаусдорфово полинормированное пространство нормируемо $\Longleftrightarrow$ его система преднорм содержит эквивалентную ей конечную подсистему.

16. Хаусдорфово полинормированное пространство метризуемо $\Longleftrightarrow$ его система преднорм содержит эквивалентную ей не более чем счетную подсистему.

17. Оператор дифференцирования в $\mathcal{O}(\mathbb{D}^0)$ непрерывен.

18. Оператор покоординатного умножения на последовательность в ${}_\infty$ непрерывен.

19. Операторы умножения слева и справа на ограниченный оператор в полинормированных пространствах $(\mathcal{B}(H), so)$ и $(\mathcal{B}(H), wo)$ непрерывны.

20. Описать непрерывные функционалы в ${}_\infty$.

21. Описать непрерывные функционалы в $(\mathcal{B}(H), wo)$.

22*. В l_1 нормовая и слабая сходимости *последовательностей* совпадают.

23. Из ограниченной по норме последовательности в пространстве, сопряженном к сепарабельному, можно выделить слабо* сходящуюся подпоследовательность.

24. Последовательность φ_n сходится в $\mathcal{S} \Longleftrightarrow t^p\varphi_n(t); t \in \mathbb{R}$ сходится классически.

25. В пространстве $\mathcal{D}$ топология $\mathbf{d}$ строго сильнее топологии $\mathbf{s}$, а последняя строго сильнее топологии $\mathbf{e}$.

26. Ни одно из трех пространств пробных функции не нормируемо.

27. Пространства $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ метризуемы.

28. Пространство $\mathcal{D}$ не метризуемо.

29. $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{S}$, а $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{E}$.

30. Оператор дифференцирования в $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ непрерывен.

31. Оператор умножения на гладкую функцию в $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ непрерывен.

32. Оператор умножения на умеренно растущую гладкую функцию в $\mathcal{S}$ непрерывен.

33. Функционал $\varphi \mapsto v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t} dt$ – это обобщенная функция порядка 1.

34. Функционал $\varphi \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$ – это обобщенная функция бесконечного порядка.

35. Непрерывная функция порождает регулярную обобщенную-функцию-с-компактным носителем $\Longleftrightarrow$ она имеет компакный носитель.

36. Последовательность горбушек, сосредоточенных на отрезках $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]; n = 1, 2, \dots$ и имеющих интеграл 1, сходится в $\mathcal{D}^*$ к δ-функции

37. Всякая регулярная обобщенная функция есть $(m+1)$-кратная производная от некоторой m раз гладкой регулярной обобщенной функции.

38. Найти производную функции Хевисайда.

39*. Найти производную функции $\ln |t|$.

40. Любая обобщенная функция обладает первообразной, и все её первообразные отличаются на постоянную.

41. Определить оператор дифференцирования в $\mathcal{S}^*$.

42. Определить оператор умножения на гладкую функцию в $\mathcal{D}^*$.

43*. Любая обобщенная функция, сосредоточенная в нуле, есть линейная комбинация δ-функции и её производных.

44. Верно ли, что в действительном гильбертовом пространстве только нулевой оператор может иметь нулевую квадратичную форму?

45. Для $T \geq 0$ единственный положительный оператор, дающий в квадрате T – это $\sqrt{T}$.

46-48. Найти семейство подпространств, ассоциированных с проектором, с оператором умножения на независимую переменную в $L_2[a, b]$ и с компактным самосопряженным диагональным оператором в l_2.

49*. Спектр самосопряженного оператора совпадает со множеством точек возрастания ассоциированного семейства подпространств.

50**. Охарактеризовать точечный спектр самосопряженного оператора в терминах ассоциированного семейства подпространств.

51-53. Проверить, что спектральная теорема в её аналитической форме верна для проектора, оператора умножения на независимую переменную в $L_2[a, b]$ и компактного самосопряженного оператора в l_2.

54-55. Проверить, что спектральная теорема в её геометрической форме верна для проектора и компактного самосопряженного оператора в l_2.

56. Найти преобразование Фурье ступеньки и проверить, что эта функция не интегрируема по Лебегу.

57. Найти преобразование Фурье первых четырех функций Эрмита.

58. Если $e^{b|t|}\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}); b > 0$, то $F(\varphi)$ продолжается до голоморфной функции в полосе $\{z : |Im(z)| < b\}$.

59. Если $e^{b|t|}\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}); b > 0$, и $\int_{\mathbb{R}} t^n \varphi(t) dt = 0; n = 0, 1, 2 \dots$, то $\varphi = 0$ почти всюду.

60. Система Эрмита является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R})$.

61. Указать коммутативные диаграммы, связывающие классическое преобразование Фурье, оператор сдвига и оператор умножения на e^{-iat}.

62. Свёртка горбушки со ступенькой даёт шляпу.

63. Свёртка функции из $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ с функцией $\psi \in \mathcal{D}$ даёт функцию из $\mathcal{E}$. При этом $(\varphi * \psi)' = \varphi * \psi'$.

64. Последовательность свёрток функции $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ с горбушками, сосредоточенными на отрезках $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]; n = 1, 2, \dots$ и имеющими интеграл 1, сходится к φ в $L_1(\mathbb{R})$.

65. Свёртка функции из $L_1(\mathbb{R})$ с функцией из $L_\infty(\mathbb{R})$ существует, ограничена и равномерно непрерывна.

66*. Свёртка функции из $L_1(\mathbb{R})$ с функцией из $L_2(\mathbb{R})$ существует и принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

67. $L_1(\mathbb{R})$ – это банахова инволютивная алгебра со свёрточным умножением и инволюцией $\varphi^*(t) := \overline{\varphi(-t)}$.

68. Оператор $\sqrt{2\pi}F : L_1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ – это инволютивный гомоморфизм банаховых инволютивных алгебр.

69*. Определить свёртку обобщенной функции из $\mathcal{D}^*$ с пробной функцией из $\mathcal{D}$ по аналогии с определением дифференцирования в $\mathcal{D}^*$.

70. Верно ли следующее утверждение: если $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ и $\int_{\mathbb{R}} t^n \varphi(t) dt = 0; n = 0, 1, 2 \dots$, то $\varphi = 0$ почти всюду?

71*. Не существует слабо* непрерывного оператора в $\mathcal{D}^*$, продолжающего преобразование Фурье в $\mathcal{S}$.

72. Преобразование Фурье умеренно растущих обобщенных функций является продолжением классического преобразования Фурье. Вывести отсюда теорему единственности классического преобразования Фурье.

73. Разновидность теоремы обращения: если $F(\varphi)$ интегрируема, то $\breve{F}F\varphi = \varphi$ почти всюду.

74. Указать коммутативные диаграммы, связывающие преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, оператор сдвига и оператор умножения на e^{-iat}.

75. Найти оператор в l_2, являющийся моделью преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.

76. Найти оператор в $L_2[a, b]$, являющийся моделью преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.

77**. Множество функций вида $\varphi * \psi; \varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R})$ есть в точности образ классического преобразования Фурье.