

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.

Лекции для I потока математиков, весенний семестр 2014 г..

Лектор А.Я.Хелемский.

1. Алгебра и спектр ее элемента. Поведение спектров при гомоморфизме. Полиномиальное исчисление от элемента алгебры. Закон отображения спектров для полиномиального исчисления. Спектр обратного элемента.

2. Банахова алгебра. Открытость множества ее обратимых элементов и непрерывность перехода к обратному элементу. Ограниченность и замкнутость спектра элемента банаховой алгебры. Местоположение спектра унитарного оператора.

3. Резольвентная функция и тождество Гильберта. Теорема о непустоте спектра. Формула спектрального радиуса (без док.).

4. Полинормированное пространство. Примеры. Топология полинормированного пространства. Сходимость последовательностей и условие хаусдорфовости в терминах преднорм.

5. Условие непрерывности оператора, действующего между полинормированными пространствами, в терминах преднорм. Сравнение топологий, заданных двумя системами преднорм. Непрерывность оператора дифференцирования в $C^\infty[a, b]$.

6. Достаточность семейства непрерывных функционалов на хаусдорфовом полинормированном пространстве. Слабая топология в полинормированном пространстве и слабая* топология в пространстве, сопряженном к полинормированному. Сравнение слабой топологии в нормированном пространстве с исходной.

7. Условие выражения функционала в виде линейной комбинации других функционалов. Описание функционалов, непрерывных в слабой и непрерывных в слабой* топологии.

8. Слабая* непрерывность оператора, сопряженного к непрерывному оператору между преднормированными пространствами. Достаточное условие слабой* плотности подпространства сопряженного пространства. Теорема Банаха-Алаоглу (без док.).

9. Пространство \mathcal{D} . Примеры функций из \mathcal{D} (горбушка и шляпа). Система преднорм в \mathcal{D} . Полинормированные пространства \mathcal{S} и \mathcal{E} . Сходящиеся последовательности в \mathcal{D} и \mathcal{E} .

10. Хаусдорфовость пространств \mathcal{D} , \mathcal{S} и \mathcal{E} . Сравнение их топологий. Непрерывность оператора дифференцирования в \mathcal{D} .

11. Пространства обобщенных функций \mathcal{D}^* , \mathcal{S}^* и \mathcal{E}^* . Условие непрерывности функционала на \mathcal{D} и на \mathcal{E} . Пространство $L_1^{lok}(\mathbb{R})$ и его вложение в \mathcal{D}^* . Регулярные и сингулярные обобщенные функции. δ -функция и ее сингулярность.

12. Топология в пространствах обобщенных функций. Плотность \mathcal{D} в \mathcal{D}^* . Существование и единственность обобщенной производной.

13. Вложение \mathcal{E}^* в \mathcal{D}^* . Носители обобщенной функции. Два подхода к понятию обобщенной функции с компактным носителем. Теорема об описании обобщенных функций с компактным носителем в терминах обобщенных производных (без док.).

14. Достаточное условие обратимости самосопряженного оператора. Местоположение спектра самосопряженного оператора.

15. Выражение для нормы многочлена от самосопряженного оператора. Инволютивная алгебра и инволютивный гомоморфизм. Непрерывное функциональное исчисление от самосопряженного оператора и его свойства.

16. Положительный элемент инволютивной алгебры. Квадратичная форма оператора и полярное тождество. Арифметический квадратный корень из положительного оператора. Свойства оператора, эквивалентные его положительности.

17. Положительная и отрицательная части самосопряженного оператора. Семейство подпространств, ассоциированное с самосопряженным оператором. Разложение единицы самосопряженного оператора. Спектральная теорема Гильберта в аналитической и геометрической форме (без док.).

18. Классическое преобразование Фурье как оператор из $L_1(\mathbb{R})$ в $C_0(\mathbb{R})$. Его инъективность и плотность образа (без док.). Связь между операциями дифференцирования и умножения на независимую переменную, осуществляемая с помощью преобразования Фурье.

19. Определение свертки. Свертка функций из $L_1(\mathbb{R})$. Связь свертки и поточечного умножения, осуществляемая с помощью преобразования Фурье.

19. Оператор Фурье в пространстве \mathcal{S} . Его непрерывность. Обратный оператор Фурье в \mathcal{S} и теорема обращения.

20. Существование и единственность преобразования Фурье в \mathcal{S}^* . Его непрерывная обратимость. Преобразование Фурье δ -функции. Доказательство теоремы единственности классического преобразования Фурье.

21. Оператор Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ и теорема Планшереля. Функции Эрмита как собственные функции оператора Фурье. Спектр этого оператора.