Программа курса «Функциональный анализ»
Мех-мат, 3 курс, отделение механики, осень 2013/14 уч.г.

1. Метрические и нормированные пространства, примеры. Полнота. Лемма о пополнении подпространства в полном метрическом пространстве.
2. Принцип вложенных шаров. Теорема Бэра. Принцип сжимающих отображений.
3. Теорема о пополнении метрического пространства.
4. Теорема Линделефа о выделении счетного подпокрытия. (Пред)компактность и вполне ограниченность в метрических пространствах, элементарные свойства.
5. Равносильные определения предкомпактности в метрических пространствах. Критерий (пред)компактности Хаусдорфа.
6. Теорема Арцела — Асколи о (пред)компактности в пространстве непрерывных функций на отрезке.
7. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность шаров в бесконечномерном нормированном пространстве.
8. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ-алгебры). Примеры. Теорема о минимальном кольце, порожденном полукольцом.
9. Меры на полукольцах и на кольцах. Пространство с мерой. Примеры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер. Полнота мер.
10. Связь σ-аддитивности и непрерывности меры. Стандартная мера на полукольце промежутков в $\mathbb{R}^n$ и ее σ-аддитивность.
11. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств.
12. Мера Лебега и корректность ее определения. Измеримость счетного объединения измеримых множеств. Счётная аддитивность меры Лебега. σ-конечные меры и их продолжение по Лебегу (без док-ва).
13. Измеримое пространство. Измеримые функции. Элементарные свойства измеримых функций.
14. Измеримость предела последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду. Критерий сходимости почти всюду на множестве конечной меры.
15. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду. Теорема Егорова. Теорема Лузина (без док-ва).
16. Пространство с мерой. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.
17. Определение интеграла Лебега в общем случае. Базовые свойства интеграла Лебега.
18. Свойства интеграла Лебега как функции множества. Неравенство Чебышёва. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радона — Никодима (без док-ва).
19. Теорема Лебега о предельном переходе.
20. Теорема Б. Леви о предельном переходе.
21. Теорема Фату. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке.
22. Счетная аддитивность произведения счетно-аддитивных мер. Прямое произведение мер.
23. Теорема Фубини (без док-ва). Достаточное условие существования двойного интеграла (теорема Тонелли).
24. Заряды. Разложения Хана и Жордана.
25. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства L_p.
26. Полнота пространств L_p.
27. Абсолютно непрерывные функции. Формула Ньютона — Лейбница для абсолютно непрерывных функций (без док-ва). Интегрирование по частям в интеграле Лебега.

28. Замена переменной в интеграле Лебега.

29. Преобразование Фурье в пространстве $L_1(\mathbb{R})$. Условие Дини.

30. Лемма о функции, неопределенный интеграл Лебега от которой равен нулю. Теорема единственности для преобразования Фурье.

31. Дифференцирование интеграла Лебега по параметру. Производная преобразования Фурье и преобразование Фурье производной.

32. Интеграл Римана — Стилтьеса. Достаточное условие его существования.

Лектор, д.ф.-м.н., доцент А. Н. Бахвалов

Зав. кафедрой ТФФА, академик Б. С. Кашин