

1. Метрические пространства. Свойства полных метрических пространств (принцип сжимающих отображений, теорема о замкнутых шарах). Теорема Бэра.
2. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Сепарабельные пространства. Критерий полноты подпространства метрического пространства.
3. Нормированные и банаховы пространства. Теорема о пополнении метрического пространства.
4. Компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах. Критерий Хаусдорфа.
5. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
6. Критерий предкомпактности множества в пространствах ℓ_p ($1 \leq p < \infty$).
7. Критерий предкомпактности множества в пространстве $C[a, b]$.
8. Евклидовы пространства. Тожество параллелограмма. Неравенство Коши-Буняковского. Существование ортогональной проекции и ортогонального дополнения в гильбертовом пространстве.
9. Ортонормированные системы. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Полные и замкнутые системы. Условия базисности ортонормированной системы.
10. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
11. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора. Непрерывные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов.
12. Теорема Хана-Банаха и её следствия. Сопряжённое пространство и его полнота.
13. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в пространствах ℓ_p при $1 \leq p < \infty$. Полнота пространств ℓ_p при $1 < p \leq \infty$.
14. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в пространствах c_0 и $L_p(\Omega, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$).
15. Теорема Рисса об общем виде функционала на гильбертовом пространстве.
16. Сопряжённые операторы в банаховых и гильбертовых пространствах. Равенство $\|A\| = \|A'\| = \|A^*\|$. Самосопряжённые операторы. Ортогональные проекторы.
17. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабо ограниченные множества.
18. Топология $\sigma(X, Y)$. Двойственность $(\sigma(X, Y))^* = Y$. Слабая и *-слабая топологии.
19. Слабая и *-слабая и сходимости. Сходимости в $B(X, Y)$.
20. Слабая компактность единичного шара в сепарабельном гильбертовом пространстве.
21. Компактные операторы. Свойства компактных операторов (сумма, композиция с ограниченным, предельный переход).
22. Теорема о действии компактного оператора на слабо сходящуюся последовательность в нормированном пространстве.
23. Теорема о связи компактности оператора с компактностью сопряжённого оператора.
24. Компактность интегральных операторов в пространствах $C[a; b]$ и $L_2[a; b]$.
25. Теорема Банаха об обратном операторе.
26. Теорема о замкнутом графике. Устойчивость обратимости операторов при малых возмущениях.
27. Спектр ограниченного оператора в банаховом пространстве. Классификация и основные свойства.
28. Спектр сопряженного оператора, спектр подобного оператора.
29. Нормальные операторы и их свойства. Спектр нормального оператора.
30. Последовательность Вейля. Спектр оператора умножения на функцию в $C[a; b]$ и в $L_2[a; b]$.
31. Спектральный радиус оператора. Спектральный радиус самосопряженного оператора.
32. Спектр самосопряженного оператора: вещественность и локализация.
33. Свойства квадратичная форма самосопряженного оператора: равенство $\sup_{\|x\|=1} |q_A(x)| = \|A\|$. Включения $m, M \in \sigma(A)$.
34. Теорема Гильберта-Шмидта

Лектор, профессор

И. А. Шейпак

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа, академик РАН, профессор

Б. С. Кашин