ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.

Лекции для I потока математиков, осенний семестр 2013 г..

Лектор А.Я.Хелемский.

1. Преднормированное и нормированное пространство. Примеры. Сопряженно-билинейный функционал и полярное тождество.

2. Скалярное произведение. Почти-гильбертово пространство. Примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертова норма и непрерывность по ней скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Теорема фон Ноймана-Йордана (без док.).

3. Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные системы. Их свойства и их примеры. Процесс ортогонализации. Определение функций и многочленов Эрмита.

4. Ряд Фурье в почти-гильбертовом пространстве. Предложение о ближайшем векторе в конечномерном подпространстве. Неравенство Бесселя. Предложение о тотальных ортонормированных системах. Теорема о разложении в ряд Фурье. Понятие о базисе Шаудера.

5. Ограниченный оператор между преднормированными пространствами. Пространство $\mathcal{B}(E,F)$ и операторная преднорма; достаточное условие, когда это норма. Сопряженное пространство.

6. Некоторые классы операторов: сжимающие, изометрические, коизометрические. Топологические, изометрические, унитарные изоморфизмы. Примеры операторов.

7. Характеризация ограниченных операторов как непрерывных. Возможность продолжения операторов в линейной алгебре (без док.). Пример Филлипса оператора, не продолжаемого с сохранением ограниченности (без док.).

8. Теорема Хана-Банаха; случай действительного поля скаляров и сепарабельного пространства.

9. Комплексная версия теоремы Хана-Банаха. Достаточность семейства ограниченных функционалов на нормированном пространстве. Теорема Рисса об описании ограниченных функционалов на $C[a,b]$ (без док.).

10. Банахово и гильбертово пространство. Достаточное условие, когда $\mathcal{B}(E,F)$ банахово. Суммируемые векторные ряды и "признак Вейерштрасса". Принцип продолжения по непрерывности. Случай изометрического изоморфизма.

11. Теорема Рисса-Фишера. Предложение о ближайшем векторе в замкнутом подпространстве.

12. Ортогональное дополнение к подмножеству и его свойства. Теорема об ортогональном дополнении. Условие тотальности системы в гильбертовом пространстве.

13. (Орто)проектор. Теорема Рисса об описании ограниченных функционалов на гильбертовом пространстве. Банахов сопряженный оператор.

14. Гильбертов сопряженный оператор. Соотношения сопряженности. Свойства операции "гильбертова звездочка". Связь между ядром оператора и обра-

зом его сопряженного.

15. Алгебраическая характеризация проектора. Теорема Банаха-Штейнхауса.

16. Теорема об открытом отображении и теорема Банаха об обратном операторе.

17. Пополнение нормированного пространства. Примеры. Теорема единственности и теорема существования пополнения.

18. Сверхограниченное (= вполне ограниченное) метрическое пространство. Эквивалентные условия сверхограниченности. Эквивалентные условия компактности метрического пространства.

19. Сверхограниченность ограниченных множеств в $\mathbb{C}_1^n$. Свойства конечномерных нормированных пространств (топологическая изоморфность нормированных пространств одной размерности, полнота и др.)

20. Лемма о почти перпендикуляре. Теорема Рисса о сверхограниченных единичных шарах. Теорема Арцела (без док.).

21. Компактный оператор. Пространство $\mathcal{K}(E, F)$ и его замкнутость в $\mathcal{B}(E, F)$. Свойство аппроксимации и его наличие у гильбертовых пространств. Понятие о примере Энфло (без док.).

22. Теорема Шмидта о строении компактных операторов между гильбертовыми пространствами.

23. Теорема Гильберта-Шмидта о строении компактных самосопряженных операторов между гильбертовыми пространствами. Унитарно эквивалентные операторы. Унитарно эквивалентная модель компактного самосопряженного оператора в l_2.

24. Ядерный оператор в гильбертовом пространстве и его след.

25. Компактность оператора, сопряженного к компактному. Коядро оператора. Фредгольмов оператор и его индекс. Теорема о фредгольмовости компактного возмущения тождественного оператора.

26. Альтернатива Фредгольма.

27. Третья теорема Фредгольма (об индексе компактного возмущения тождественного оператора). Тройная теорема Фредгольма в “традиционной” формулировке. Понятие о теореме Аргироса-Хойдена (без док.)

28. Спектр ограниченного оператора в банаховом пространстве. Точечный, непрерывный и остаточный спектр. Строение спектра компактного оператора в гильбертовом пространстве.