Программа курса «Функциональный анализ»
(механико-математический факультет МГУ, специальное вечернее отделение
(инженерный поток), третий курс, весенний семестр 2012 /2013 учебного года)
Лектор - доцент В.П. Серебряков

I. Линейные операторы. (продолжение раздела)

1. Спектр и резольвента замкнутого линейного оператора. Замкнутость спектра. Классификация точек спектра: точечный, непрерывный, остаточный спектр. Предельный спектр и спектр сжатия. Тождество Гильберта.

2. Свойства спектра ограниченного оператора (непустота, ограниченность). Спектральный радиус. Формула для спектрального радиуса.

3. Теорема об отображении спектра. Подобные операторы; теорема о спектрах подобных операторов.

4. Примеры: нахождение спектра и его частей а) оператора дифференцирования в пространстве $C[a, b]$, б) оператора дифференцирования с нулевым краевым условием $f(a) = 0$ в пространствах $C[a, b]$ и $L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$, в) диагонального оператора в ℓ_p $(1 \le p \le \infty)$, г) левого и правого сдвигов в ℓ_p $(1 \le p \le \infty)$, д) двустороннего сдвига в ℓ_p $(1 \le p < \infty)$, е) оператора умножения на непрерывную функцию в $C[a, b]$, ж) оператора умножения на существенно ограниченную функцию в $L_p[X, \mu]$ $(1 \le p < \infty)$.

5. Компактные операторы и их свойства. Необходимое и достаточное условие компактности диагонального оператора в ℓ_p $(1 \le p \le \infty)$. Компактность интегральных операторов с непрерывным ядром в пространствах $C[a, b]$ и $L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$.

6. Теорема Рисса-Шаудера о спектре компактного оператора.

II. Гильбертовы пространства. Элементы спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве.

7. Евклидовы пространства; примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Характеристическое свойство евклидовых пространств (тождество параллелограмма). Пополнение евклидова пространства.

8. Ортогональные системы векторов в евклидовом пространстве; ортогональные базисы, примеры ортогональных базисов. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Ряд Фурье по ортонормированной системе, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Теорема Стеклова. Ряд Фурье, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля в случае ортогональной ненормированной системы. Ортогональное дополнение подмножества векторов евклидова пространства.

9. Гильбертовы пространства; примеры. Теорема Рисса-Фишера. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Существование элемента в непустом замкнутом выпуклом подмножестве гильбертова пространства, ближайшего к данному, и его единственность. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства в прямую сумму замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения. Критерий полноты системы векторов в гильбертовом пространстве.

10. Теорема Бари.

11. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Рефлексивность гильбертовых пространств.

12. Существование и единственность оператора A^*, (эрмитово) сопряжённого к ограниченному линейному оператору A в гильбертовом пространстве, его линейность, ограниченность и равенство $\|A^*\| = \|A\|$. Соотношения $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \ker A^*$, $\ker A = \left(\overline{\mathrm{Im}(A^*)}\right)^\perp$ для

любого линейного ограниченного оператора A в гильбертовом пространстве. Связь между спектрами и их частями оператора и его сопряжённого.

13. Ограниченные самосопряжённые операторы. Равенства $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$ для самосопряжённого оператора A, $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для любого ограниченного оператора A, $\|A^n\| = \|A\|^n$ $(n \in \mathbb{N})$ для самосопряжённого оператора A. Спектральный радиус ограниченного самосопряжённого оператора. Спектр ограниченного самосопряжённого оператора.

14. Теорема о поточечной сходимости ограниченной сверху (снизу) неубывающщй (невозрастающей) последовательности самосопряжённых ограниченных операторов.

15. Операторы ортогонального проектирования и их свойства.

16. Нормальные операторы; соотношения $\ker A = \ker A^* = (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$ для нормального оператора A; пустота остаточного спектра нормального оператора. Изометрические и унитарные операторы; спектр унитарного оператора.

17. Компактные операторы в гильбертовом пространстве. Компактность сопряжённого оператора к компактному. Теорема Гильберта-Шмидта.

18. Первая, вторая и третья теоремы Фредгольма в случаях гильбертовых и банаховых пространств.

19. Операторы с конечной абсолютной нормой и их свойства. Ядерные операторы и их свойства; теорема о следе ядерного оператора.

20. Интегральные операторы Гильберта-Шмидта. Абсолютная норма интегрального оператора Гильберта-Шмидта. Взаимно однозначное соответствие между интегральными операторами Гильберта-Шмидта и квадратично интегрируемыми ядрами. Ядро произведения двух интегральных операторов Гильберта-Шмидта. Ядро сопряжённого оператора. Необходимое и достаточное условие самосопряжённости интегрального оператора Гильберта-Шмидта. Примеры нахождения спектра и собственных функция самосопряжённых интегральных операторов Гильберта-Шмидта. Вычисление нормы оператора $(Af)(x) = \int_0^x f(y)dy$ в пространстве $L_2[0, 1]$.

21. Общее определение сопряжённого оператора в гильбертовом пространстве. Связь между графиком оператора и графиком сопряжённого к нему оператора. Линейность и замкнутость сопряжённого оператора. Равенство $A^{**} = \overline{A}$ для линейного оператора A с плотной областью определения, допускающего замыкание. Симметрические операторы. Замыкаемость симметрического оператора. Самосопряжённые операторы. Замкнутость самосопряжённого оператора. Спектр неограниченного самосопряжённого оператора. Примеры неограниченных самосопряжённых операторов.

22. Спектральная теорема для ограниченных самосопряжённых операторов.

23. Спектральная теорема для самосопряжённых операторов в общем случае (без доказательства). Описание спектра самосопряжённого оператора при помощи его спектральной функции.

III. Преобразование Фурье.

24. Преобразование Фурье функций из пространства L_1 и его свойства. Примеры вычисления преобразования Фурье.

25. Теорема единственности для преобразования Фурье. Формула обращения.

26. Полнота системы функций $\{x^n f(x)\}, n = 0, 1, 2, \ldots$ в $L_p(a, b)$ $(1 \le p < \infty)$, где $f(x)$ — функция, измеримая и почти всюду отличная от нуля на интервале (a, b), $-\infty \le a < b \le \infty$, удовлетворяющая неравенству $|f(x)| \le Ce^{-\delta|x|}$ ($C > 0$ и $\delta > 0$ — константы). Ортогональные базисы в пространствах $L_2(-\infty, \infty)$ и $L_2(0, \infty)$; полнота функций Чебышёва-Эрмита и Чебышёва-Лагерра.

27. Свёртка функций. Преобразование Фурье и свёртка функций.

28. Пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Оператор Фурье в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и его свойства.

29. Теорема Планшереля. Преобразование Фурье в пространстве L_2.

IV. Обобщённые функции.

30. Пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ основных функций. Неметризуемость сходимости в $\mathscr{D}(\Omega)$.

31. Пространство $\mathscr{D}'(\Omega)$ обобщённых функций. Вложение локально интегрируемых в Ω функций в $\mathscr{D}'(\Omega)$. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Сингулярность $\delta-$функции и $\mathscr{P}\left(\frac{1}{x}\right)$.

32. Действия над обобщёнными функциями из $\mathscr{D}'$ (умножение на бесконечно дифференцируемую функцию, дифференцирование, замена переменных). Задача Шварца. Примеры вычисления производных обобщённых функций.

33. δ-образные последовательности. Предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{-n}f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, где $f(x)\in L_1(\mathbb{R}^n)$. Формулы Сохоцкого.

34. Решение простейших уравнений в пространстве обобщённых функций $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^1)$ ($y'=0, (x-x_0)^n y = 0 (n\in\mathbb{N})$). Существование первообразной у любой обобщённой функции $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^1)$.

35. Прямое произведение и свёртка обобщённых функций, их свойства.

36. Носитель обобщённой функции. Обобщённые функции с компактным носителем. Пространства $\mathscr{E}(\Omega), \mathscr{E}'(\Omega)$.

37. Пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Обобщённые функции медленного роста и операции над ними. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста и его свойства; примеры: вычисление преобразования Фурье обобщённых функций $\delta(x-x_0), 1, e^{i\langle a,x\rangle}(a\in\mathbb{R}^n)$, $\cos(ax), \sin(ax)(a\in\mathbb{R}^1)$, $D^\alpha\delta(x), x^\alpha(\alpha$ — мультииндекс$), \theta(x), \theta(-x)(\theta$ — функция Хевисайда$)$, $\operatorname{sign}(x), \mathscr{P}\left(\frac{1}{x}\right), |x|$.

Зав. кафедрой теории функций и функционального анализа, академик РАН, профессор — Б.С. Кашин

Кандидат физико-математических наук, доцент — В.П. Серебряков