Программа курса

«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» (*3 курс, отд. механики*)

1. Линейные пространства сходимости $(\boldsymbol{E},\zeta)$. Аксиома полноты. Доказательство регулярности сходимости и выполнения аксиомы полноты в полных метрических линейных пространствах. Пример нерегулярной сходимости в пространстве $\mathscr{K}(\mathbb{R})$.

2. Сопряженное пространство $(\boldsymbol{E}',\zeta')$ к линейному пространству сходимости $(\boldsymbol{E},\zeta)$. Теорема о полноте сопряженного пространства.

3. Локально выпуклые пространства $(\boldsymbol{E},\mathscr{P})$. Доказательство метризуемости сходимости в счетно-нормированном пространстве. Равносильность непрерывности и ограниченности линейного функционала, заданного в счетно-нормированном пространстве.

4. Пространство $\mathscr{D}(X)$ основных функций. Доказательство полноты пространства $\mathscr{D}'(X)$ обобщенных функций. Действия с обобщенными функциями.

5. Локальная структура обобщенных функций в пространстве $\mathscr{D}'(X)$. Существование первообразной обобщенной функции в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

6. Носитель обобщенной функции. Сопряженное пространство $\mathscr{E}'(X)$. Характеристика образа вложения $\mathscr{E}'(X)\subset\mathscr{D}'(X)$ как пространства обобщенных функций с компактным носителем. Структура обобщенных функций с носителем в точке (без доказательства).

7. Регулярные обобщенные функции. Взаимная однозначность вложения пространства $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ локально интегрируемых функций в пространство $\mathscr{D}'(X)$ обобщенных функций.

8. Определение обобщенной производной в смысле Соболева. Пространство Соболева $\boldsymbol{W}_p^k(X)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Доказательство полноты пространства Соболева.

9. Определение пространства Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Вложение сопряженного пространства Шварца $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Действия с обобщенными функциями из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

10. Преобразование Фурье функции $\mathrm{e}^{-\|x\|^2/2}$. Доказательство биективности преобразования Фурье в пространстве Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Преобразование Фурье в сопряженном пространстве Шварца $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и его свойства.

11. Преобразование Фурье в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Лемма Римана–Лебега. Условие Дини в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$. Формулы умножения, обращения, дифференцирования и свертки для преобразования Фурье в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^n)$.

12. Преобразование Фурье в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Теорема Планшереля. Формулы умножения и обращения для преобразования Фурье в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Система собственных функций Эрмита в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

13. Биортогональные системы в нормированном пространстве. Ядро $\ker(A)$ и образ $\mathrm{Im}(A)$ линейного оператора $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$. Необходимые и достаточные условия биективности линейного оператора. Доказательство линейности обратного оператора.

14. Определение сопряженного оператора $A^*:\boldsymbol{F}^*\to\boldsymbol{E}^*$ для ограниченного оператора $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$. Равенство норм $\|A^*\|=\|A\|$. Аннуляторы множеств в пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}^*$. Соотношения между ядром и образом оператора и его сопряженного.

15. Произведение банаховых пространств и доказательство его полноты. Определение замкнутости графика линейного оператора. Теорема Банаха о замкнутом графике.

16. Замкнутые операторы. Пример замкнутого неограниченного оператора. Критерий замкнутости ограниченного оператора. Доказательство существования и замкнутости эрмитово-сопряженного оператора. Теорема Хеллингера–Теплица.

17. Теорема Банаха об обратном операторе. Факторпространство банахова пространства и доказательство его полноты. Теорема о гомоморфизме.

18. Теорема о тройке. Доказательство равенств $\mathrm{Im}(A)=\ker(A^*)_\perp$ и $\mathrm{Im}(A^*)=\ker(A)^\perp$ для операторов $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ в банаховых пространствах с замкнутым образом $\mathrm{Im}(A)$.

19. Определение проектора в линейном пространстве и его свойства. Теорема о дополняемых подпространствах в банаховом пространстве. Доказательство дополняемости замкнутых подпространств $L \subset \boldsymbol{E}$ в случае $\dim(L) < \infty$ или $\operatorname{codim}(L) < \infty$.

20. Теорема о голоморфности резольвенты и оценка ее нормы. Свойства спектра и резольвенты ограниченного оператора. Спектр сопряженного оператора.

21. Свойства точечного, непрерывного, остаточного, предельного и дефектного спектра ограниченного оператора в банаховом пространстве. Теорема о границе спектра.

22. Вычисление спектра оператора Фурье и оператора свертки в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Теорема о спектральном радиусе ограниченного оператора.

23. Свойства компактных операторов в банаховых пространствах. Теорема Шаудера о равносильности компактности оператора и его сопряженного.

24. Свойства спектра компактного оператора. Спектральная теорема Рисса–Шаудера для компактного оператора в банаховом пространстве. Достаточные условия компактности интегрального оператора в $\boldsymbol{L}_p[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

25. Теорема об образе классического оператора Фредгольма $T = I - A$, где A — компактный оператор в банаховом пространстве. Первая и вторая теоремы Фредгольма о разрешимости уравнений в банаховом пространстве.

26. Доказательство третьей теоремы (альтернативы Фредгольма) и четвертой теоремы Фредгольма о разрешимости уравнений в банаховом пространстве.

27. Фредгольмовы операторы в банаховом пространстве. Лемма о замкнутости образа Фредгольмова оператора. Теорема об индексе произведения фредгольмовых операторов.

28. Теорема Никольского и ее следствие об устойчивости индекса. Существенный спектр ограниченного оператора. Вычисление существенного спектра диагонального оператора в $\boldsymbol{\ell}_p$ и оператора умножения на функцию в $\boldsymbol{L}_p[a,b]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

29. Эрмитово-сопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства точечного, непрерывного, остаточного и предельного спектра. Формулировка теорем Фредгольма в гильбертовом пространстве. Теорема Вейля о компактном возмущении.

30. Теорема о спектральном радиусе эрмитова оператора. Свойства спектра эрмитова оператора. Спектральная теорема Гильберта–Шмидта для компактного эрмитова оператора в гильбертовом пространстве.

Дополнительная литература.

1. Богачев В. И., Смолянов О. Г. «Действительный и функциональный анализ».
2. Владимиров В. С. «Обобщенные функции в математической физике».
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. «Функциональный анализ».
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. «Элементы теории функций и функционального анализа».
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа».
5. Рид М., Саймон Б. «Методы современной математической физики» т.1.
6. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».
7. Хелемский А. Я. «Лекции по функциональному анализу».

Весна 2013 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*