

Билеты по курсу „Функциональный анализ” 6 семестр
3 курс, 1 поток, 2012/13 уч. год

1. Сопряженные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах. Равенство $\|A^*\| = \|A\|$.
2. Спектр оператора. Сохранение обратимости при малых возмущениях. Замкнутость спектра, включение его в круг радиуса, равного норме оператора, и непустота.
3. Спектр диагонального оператора. Норма и спектр оператора умножения на функцию.
4. Строение спектра компактного оператора в бесконечномерном пространстве.
5. Альтернатива Фредгольма ($\text{Ker}(I - K) = 0 \iff (I - K)X = X$).
6. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма. Критерий Вейля и вещественность спектра самосопряженного оператора.
7. Равенства

$$\|A\| = \sup\{|(Ax, x)|, \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda|: \lambda - \text{точка спектра } A\}$$

для самосопряженного оператора A .

8. Теорема Гильберта – Шмидта о компактных самосопряженных операторах.
9. Понятие о локально выпуклом пространстве. Примеры. Пространства \mathcal{D} и \mathcal{S} и сходимости в них. Плотность \mathcal{D} в пространстве $L^2(\mathbf{R}^1)$.
10. Обобщенные функции классов \mathcal{D}' и \mathcal{S}' . Производная обобщенной функции. Равенство $(\ln|x|)' = \text{V.P.} \frac{1}{x}$. Носитель и сингулярный носитель.
11. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его основные свойства (непрерывность, ограниченность, производная преобразования Фурье, преобразование Фурье производной).
12. Формула обращения для преобразования Фурье (для точек непрерывности ограниченной интегрируемой функции с интегрируемым преобразованием Фурье). Формула обращения в точках дифференцируемости (без доказательства).
13. Преобразование Фурье в \mathcal{S} и его непрерывность.
14. Равенство Парсеваля для интегралов Фурье. Инъективность преобразования Фурье. Полнота системы функций Эрмита.
15. Преобразование Фурье в \mathcal{S}' . Преобразование Фурье дельта-функции.
16. Преобразование Фурье в $L^2(\mathbf{R}^1)$ и теорема Планшереля. Понятие всплеска (вейвлета).
17. Свертка интегрируемых функций. Свертка обычной и обобщенной функций. Использование преобразования Фурье и свертки для решения дифференциальных уравнений.
18. Пространства С.Л. Соболева $W^{p,k}$ и их характеристика через пополнение по соболевской норме.
19. Описание $W^{2,k}$ через преобразование Фурье. Теоремы вложения в L^q и C (без доказательства).
20. Унитарные операторы и унитарная эквивалентность операторов. Спектр оператора преобразования Фурье и спектр оператора свертки.
21. Теорема об отображении спектров для многочленов. Непрерывные функции от самосопряженных операторов и равенство $\|f(A)\| = \sup_{t \in \sigma(A)} |f(t)|$.
22. Циклические векторы. Эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию (доказательство для оператора с циклическим вектором).
23. Проекторы и проекторнозначные меры. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере. Явное вычисление спектральной меры для оператора умножения на аргумент и для проектора.

Лектор профессор

В. И. Богачев

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа, академик РАН

Б. С. Кашин