Программа курса "Функциональный анализ"
(механико-математический факультет МГУ, специальное вечернее отделение (инженерный поток),
3-й курс, осенний семестр 2012/2013 учебного года).

Лектор — доцент В.П. Серебряков.

I. Метрические и топологические пространства.

1. Метрические пространства, сходимость последовательностей в метрическом пространстве. Открытые и замкнутые множества. Полные и сепарабельные метрические пространства. Полнота и сепарабельность пространств $C[a,b]$ и l_p $(1 \leqslant p < \infty)$. Полнота и несепарабельность l_∞. Сепарабельность $l_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$, неполнота и несепарабельность $C_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

2. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра о категориях. Существование функций, непрерывных на отрезке и недифференцируемых ни в одной точке этого отрезка.

3. Непрерывные отображения метрических пространств. Изометрия, изометричные пространства. Принцип сжимающих отображений и примеры его применения.

4. Пополнение метрического пространства; примеры. Теорема о пополнении метрического пространства.

5. Топологические пространства; примеры. Сравнение топологий. База топологии, теорема о задании топологии посредством базы; определяющие системы окрестностей; аксиомы отделимости. Теорема Линделёфа о финальной компактности топологических пространств со второй аксиомой счетности. Сходящиеся последовательности в топологическом пространстве.

6. Непрерывные отображения топологических пространств; критерии непрерывности отображения; гомеоморфизм. Аксиомы отделимости; колмогоровские, достижимые, хаусдорфовы, регулярные и вполне регулярные топологические пространства. Нормальные пространства; нормальность метрических пространств. Метризуемость; первая метризационная теорема (без доказательства).

7. Компактные топологические пространства, компакты. Критерий компактности в терминах центрированных систем замкнутых множеств. Основные свойства компактных топологических пространств: наличие предельной точки у каждого бесконечного подмножества компактного пространства, компактность замкнутого подмножества компактного пространства, замкнутость компакта в любом содержащем его хаусдорфовом пространстве, нормальность компакта. Предкомпактные множества в топологических пространствах.

8. Непрерывный образ компактного пространства. Замкнутость непрерывного отображения компактного пространства в хаусдорфово. Гомеоморфность биективного непрерывного отображения компактного пространства на хаусдорфово. Непрерывные действительнозначные функции на компактных топологических пространствах, их свойства.

9. Вполне ограниченные множества в метрических пространствах, их свойства. Примеры вполне ограниченных множеств и ограниченных множеств, не являющихся вполне ограниченными. Критерий вполне ограниченности в терминах фундаментальных последовательностей.

10. Компактные метрические пространства; критерии компактности метрического пространства. Критерии компактности множества в метрическом пространстве. Равномерная непрерывность непрерывного отображения метрического компакта в метрическое пространство.

11. Предкомпактные множества в метрических пространствах. Общие критерии предкомпактности множества в метрическом пространстве. Теорема Арцела. Критерии предкомпактности множеств в пространствах l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ и L_p $(1 \leqslant p < \infty)$.

II. Линейные нормированные и топологические пространства.

12. Линейные пространства. Базис Гамеля и его существование. Факторпространства линейного пространства.

13. Линейные нормированные пространства, банаховы пространства; примеры. Подпространства нормированного пространства. Факторпространства нормированного пространства; полнота факторпространства банахова пространства по его замкнутому подпространству.

14. Эквивалентные нормы в линейном пространстве. Примеры эквивалентных и неэквивалентных норм. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве и ее следствия.

15. Теорема о вложенных шарах в случае нормированных пространств. Линейная изометрия, линейно изометричные (изоморфные) линейные нормированные пространства. Пополнение линейного нормированного пространства. Базис Шаудера.

16. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве. Критерий конечномерности линейного нормированного пространства.

17. Линейные топологические пространства; примеры. Выполнимость третьей аксиомы отделимости в любом топологическом линейном пространстве. Ограниченные множества в линейных топологических пространствах. Локально ограниченные и локально выпуклые пространства. Теоремы Колмогорова и Крейна–Мильмана (без доказательств). Полинормированные пространства.

III. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Слабая топология, слабая сходимость в линейных топологических и нормированных пространствах.

18. Линейный функционал в линейном пространстве и его геометрический смысл. Линейные непрерывные функционалы в линейных топологических пространствах.

19. Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах; эквивалентность непрерывности и ограниченнности линейного функционала в нормированном пространстве. Норма ограниченного линейного функционала в нормированном пространстве и ее геометрическая интерпретация. Примеры вычисления норм функционалов. Существование не непрерывного линейного функционала в бесконечномерном нормированном пространстве.

20. Теорема Хана–Банаха (случаи действительного и комплексного линейного пространства, случай нормированного пространства). Следствия из теоремы Хана–Банаха. Лемма об аннуляторе.

21. Пространство, сопряженное к нормированному; его полнота. Сепарабельность нормированного пространства в случае, когда сопряженное к нему сепарабельно. Примеры сопряженных пространств. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в пространстве $C[a,b]$ (без доказательства); линейная изометричность пространств $(C[a,b])^*$ и $V^0[a,b]$. Теорема о представлении линейного непрерывного функционала в пространстве $C^1[a,b]$ (без доказательства).

22. Каноническое вложение нормированного пространства в его второе сопряженное. Рефлексивные банаховы пространства. Примеры рефлексивных и нерефлексивных банаховых пространств.

23. Слабая топология и слабая сходимость в линейных топологических пространствах. Слабая сходимость в нормированных пространствах; ограниченность слабо сходящейся последовательности, равносильность ограниченности по норме и слабой ограниченности для подмножеств нормированного пространства. Достаточные условия слабой сходимости в нормированном пространстве. Критерии слабой сходимости в пространствах l_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и $C[a,b]$.

24. $*$-слабая топология и $*$-слабая сходимость в сопряженном пространстве. Ограниченность $*$-слабо сходящейся последовательности в пространстве, сопряженном к банахову. Достаточные условия $*$-слабой сходимости в пространств, сопряженном к нормированному. Критерий счетной предкомпактности в $*$-слабой топологиии для подмножеств пространства, сопряженного к сепарабельному банахову пространству. Теорема Банаха–Алаоглу (без доказательства).

IV. Линейные операторы (начало раздела).

25. Определение и примеры линейных операторов. Действия с операторами. Ограниченные операторы; связь непрерывности и ограниченности. Норма ограниченного линейного оператора, отображающего нормированное пространство в нормированное. Примеры вычисления норм операторов.

26. График оператора. Замкнутые операторы. Замыкание оператора. Условия, при которых оператор допускает замыкание. Замкнутость ограниченного оператора. Примеры неограниченных замкнутых операторов и незамыкаемых операторов.

27. Обратный оператор, обратимый оператор. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема об открытом отображении. Лемма о тройке. Теорема о замкнутом графике.

28. Теорема Банаха–Штейнгауза, ее применения в анализе.

29. Пространство линейных ограниченных операторов, отображающих нормированное пространство в нормированное; условие его полноты. Различные сходимости (по операторной норме, поточечная, слабая) последовательностей линейных ограниченных операторов и связь между ними.

30. Сопряженные операторы и их свойства. Лемма об аннуляторе ядра оператора.

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа
академик РАН, профессор /Б. С. Кашин/

Кандидат физ.-мат. наук, доцент /В. П. Серебряков./