ПРОГРАММА КУРСА

«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» (*3 курс, отделение механики*)

1. Метрические и нормированные пространства. Доказательство полноты пространства $\boldsymbol{B}(X)$. Теорема о пополнении метрического пространства.

2. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Множества первой и второй категории. Теорема Бэра о категории. Борелевские множества в метрическом пространстве.

3. Топологические и метрические линейные пространства. Эквивалентные определения непрерывности отображений метрических пространств. Принцип сжимающих отображений.

4. Определение ограниченных множеств в метрическом линейном пространстве. Принцип равностепенной непрерывности линейных отображений и его следствие.

5. Эквивалентные определения компактности множества в метрическом пространстве. Вполне ограниченные множества. Критерий компактности Хаусдорфа.

6. Свойства непрерывных функций на компакте $\boldsymbol{K}$. Критерий предкомпактности множества в пространстве $\boldsymbol{C}(K)$ (теорема Асколи–Арцела).

7. Принцип продолжения по непрерывности (равномерно) непрерывных отображений. Критерий предкомпактности множества в пространстве $\boldsymbol{B}(X)$.

8. Изоморфизм конечномерных нормированных пространств. Свойство эквивалентности норм. Существование наилучшего приближения конечномерным подпространством.

9. Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Необходимое и достаточное условие компактности единичного шара в нормированном пространстве.

10. Определение кольца, алгебры, σ-кольца и σ-алгебры. Понятие σ-алгебры борелевских множеств в метрическом пространстве. Описание элементов минимального кольца, порожденного полукольцом множеств.

11. Существование и единственность продолжения меры с полукольца на минимальное кольцо. Элементарные свойства аддитивных и σ-аддитивных мер. Непрерывность сверху и снизу σ-аддитивных мер.

12. Доказательство σ-аддитивности регулярных мер в метрическом пространстве. Определение меры Стилтьеса на прямой $\mathbb{R}$.

13. Понятие внешней меры множества. Свойства измеримых множеств. Теорема Каратеодори.

14. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Теорема о продолжении σ-аддитивной меры по Лебегу.

15. Лемма об измеримой оболочке. Эквивалентность определений измеримости множества конечной меры в смысле Каратеодори, Валле-Пуссена и Лебега.

16. Теорема о продолжении регулярных мер. Мера Лебега и мера Лебега–Стилтьеса на прямой $\mathbb{R}$. Доказательство существования неизмеримого множества по Лебегу на отрезке $[0,1]$.

17. Измеримые функции и их свойства. Существование последовательности простых измеримых функций, монотонно сходящихся к неотрицательной измеримой функции.

18. Необходимое и достаточное условие измеримости функции, заданной на измеримом множестве метрического пространства ($\boldsymbol{C}$-свойство Лузина).

19. Взаимосвязь различных типов сходимости измеримых функций (почти всюду, по мере и почти равномерно). Теорема Егорова.

20. Интеграл Лебега и его свойства. Теорема о монотонной сходимости интеграла Лебега.

21. Теоремы Фату и Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенство Чебышева и его следствие.

22. Счетная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Радона–Никодима (без доказательства).

23. Пространство $\boldsymbol{BV}[a,b]$ функций ограниченной вариации и их свойства. Разложение Жордана. Интеграл Лебега–Стилтьеса и его сравнение интегралом Стилтьеса на отрезке $[a,b]$.

24. Пространство $\boldsymbol{AC}[a,b]$ абсолютно непрерывных функций и их свойства. Характеристическое свойство абсолютно непрерывной функции на отрезке $[a,b]$.

25. Прямое произведение мер. Доказательство соответствующих свойств аддитивности (σ-аддитивности) прямого произведения аддитивных (σ-аддитивных) мер.

26. Вычисление меры измеримого множества в произведении пространств при помощи сечений. Теорема Фубини.

27. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Сравнение интегралов Римана и Лебега на n-мерном промежутке пространства $\mathbb{R}^n$.

28. Неравенства Гельдера и Минковского. Обобщенное неравенство Минковского.

29. Пространства $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Теорема о полноте этих пространств.

30. Теорема о всюду плотности множества $\boldsymbol{C}(X)$ непрерывных функций в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. Всюду плотные множества в $\boldsymbol{L}_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$.

31. Пространство $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ линейных ограниченных операторов. Теорема о полноте. Принцип равномерной ограниченности в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ (теорема Банаха–Штейнгауза).

32. Лемма Цорна. Теорема Хана–Банаха о продолжении линейного функционала и ее следствие для нормированных пространств.

33. Теорема Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов на пространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$, а также на пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$ (без доказательства).

34. Свойства сильной сходимости операторов в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. Критерий сильной сходимости.

35. Изометрическое вложение нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ во второе сопряженное пространство $\boldsymbol{E}^{**}$. Свойства слабой* сходимости функционалов в $\boldsymbol{E}^*$ и слабой сходимости элементов в $\boldsymbol{E}$.

36. Теорема о слабой* компактности единичного шара $\boldsymbol{S}^* \subset \boldsymbol{E}^*$ сопряженного пространства $\boldsymbol{E}^*$ к сепарабельному нормированному пространству $\boldsymbol{E}$.

37. Евклидовы и гильбертовы пространства. Равенство параллелограмма. Характеристика евклидовых пространств (без доказательства). Неравенства Коши–Буняковского и Беппо Леви.

38. Существование и единственность наилучшего приближения в гильбертовом пространстве. Вычисление наилучшего приближения конечномерным подпространством.

39. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства и ее следствие. Теорема Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов в гильбертовом пространстве.

40. Ортонормированные системы элементов в евклидовом пространстве. Неравенство Бесселя. Теорема Стеклова. Полнота тригонометрической системы в пространстве $\boldsymbol{L}_2[0,1]$.

41. Метод ортогонализации Грама–Шмидта системы элементов евклидова пространства. Теорема Рисса–Фишера об изометрическом изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

Дополнительная литература.

1. Богачев В. И. «Функциональный анализ».
2. Данфорд Н., Шварц Дж. «Линейные операторы».
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. «Функциональный анализ».
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В «Элементы теории функций и функционального анализа».
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. «Элементы функционального анализа».
6. Федоров В. М. «Курс функционального анализа».
7. Хелемский А. Я. «Лекции по функциональному анализу».

Осень 2012 года. Лектор доцент Федоров В. М.

Заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа,
академик РАН, профессор *Кашин Б. С.*