Программа курса «Функциональный анализ»
Мех-мат, 3 курс, 2 поток, осень 2012/13 уч.г.

1. Метрические пространства. Полнота. Нормированные и банаховы пространства. Теорема о пополнении.

2. Принцип вложенных шаров. Теорема Бэра о категории. Теорема о сжимающих отображениях.

3. (Пред)компактность в метрических пространствах. Равносильные определения. Критерий (пред)компактности Хаусдорфа.

4. (Пред)компактность в пространствах ограниченных функций. Теорема Арцела — Асколи о (пред)компактности в пространствах непрерывных функций.

5. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность шаров в бесконечномерном нормированном пространстве.

6. Пространство линейных ограниченных операторов, достаточное условие его полноты. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха — Штейнгауза).

7. Теорема об открытом отображении. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.

8. Продолжение оператора по непрерывности. Теорема Хана — Банаха (вещественный сепарабельный случай).

9. Лемма Цорна и существование алгебраического базиса. Завершение доказательства вещественного случая в теореме Хана — Банаха.

10. Теорема Хана — Банаха (комплексный случай). Продолжение линейного непрерывного функционала с сохранением нормы.

11. Сопряженное пространство. Банахово сопряженный оператор. Второе сопряженное пространство. Рефлексивные пространства.

12. Общий вид линейных непрерывных функционалов на пространстве $L_p(X, \mu)$.

13. Общий вид линейных непрерывных функционалов на пространстве $C([a, b])$.

14. Полинормированные пространства. Их непрерывные линейные отображения, сравнение топологий.

15. Слабая и *-слабая топология и сходимость на нормированных пространствах. Ограниченность слабо ограниченного множества. Теоремы о слабой и $*$-слабой компактности (выбор *-слабо сходящейся подпоследовательности — с доказательством, остальное - без).

16. Евклидовы и гильбертовы пространства. Ортогональные дополнения.

17. Ортогональные и ортонормированные системы. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Полнота ортогональной системы и эквивалентные ей свойства.

18. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве.

19. Эрмитово сопряженные операторы, самосопряженные операторы. Ортогональные проекторы. Продолжение оператора в гильбертовом пространстве.

20. Спектр оператора, его классификация. Компактность спектра.

21. Непустота спектра. Теорема о спектральном радиусе.

22. Нормальные операторы и пустота их остаточного спектра. Критерий Вейля. Свойства спектра самосопряженного оператора.

23. Компактные операторы. Операции над операторами, сохраняющие компактность. Компактность оператора, сопряженного к компактному.

24. Компактность в $L_2(X, \mu)$ интегрального оператора с ядром из $L_2(X^2, \mu \times \mu)$.

25. Теорема о спектре компактного оператора.

26. Лемма об ортогональной сумме последовательности подпространств. Теорема Гильберта — Шмидта.

27. Теорема Шмидта о строении компактного оператора в гильбертовом пространстве. s-числа и абсолютная норма оператора.

28. Абсолютная норма интегральных операторов в $L_2(X, \mu)$. Представление оператора в $L_2(X, \mu)$ с конечной абсолютной нормой как интегрального.

29. Леммы о равенстве $\dim \ker(I - K)$ и $\operatorname{codim} \operatorname{Im}(I - K')$ для компактного K и о прямой сумме двух подпространств, одно из которых конечномерно. Альтернатива Фредгольма.

30. Теорема Фредгольма (о правых частях, для которых уравнение $(I - K)x = y$ разрешимо, и о размерности пространства решений).

31. Фредгольмовы операторы. Теорема Никольского о почти обратимости фредгольмова оператора.

Лектор, д.ф.-м.н., доцент А. Н. Бахвалов

Зав. кафедрой ТФФА, академик РАН Б. С. Кашин